MUKAVEMET

1. GİRİŞ

- Mekanik Tanımı
- Elastisite
- İdeal Kavramlar (elastik cisim- homogen- izotrop- hooke yasası)

2. İÇ KUVVETLER ve NORMAL KUVVET HALİ

- Normal Gerilme
- Kayma Gerilmesi
- Boyutlandırma

3. KESİT TESİRLERİ DİYAGRAMLARI (Basit Mukavemet Halleri)

- Kesit tesirleri
- Yayılı yük, kesme kuvveti, eğilme momenti arasındaki bağıntılar

4. MUKAVEMETİN TEMEL KAVRAMLARI

-Tek eksenli Gerilme Hali

- İki Eksenli Gerilme Hali

-Üç Eksenli Gerilme Hali

-Gerilme ve Şekil Değiştirme İlişkisi

5. BURULMA

6. ATALET MOMENTLERİ

7. EĞİLME

8. KESMELİ EĞİLME

9. ELASTİK EĞRİ ve EĞİM

-Mohr Metodu (Moment Alan)

- Konsol Kiriş Yöntemi

10. NORMAL KUVVET ve EĞİLME

11. EĞİLMELİ BURKULMA

12. ENERJİ YÖNTEMLER

-Virtüel İş İlkesi [1].

1. GİRİŞ

Mukavemet; Kuvvetlerin tesiri altında meydana gelen şekil değişikliği, kuvvetlerin etkisi kalktıktan sonra kaybolan, yani; eski şeklini alan elastik cisimlerin mekaniğidir.

Teknik alanda kullanılan malzemelerin çeşitli yüklere dayanması için gerekli hesap esaslarını inceler.

Bir mühendisin vazifelerinden en mühimi elemanın (malzemenin) bütün kullanma şartlarını göz önüne alarak yapı ve makine elemanlarının boyutlarını hesaplamak olduğuna göre; bu boyutları hesaplarken iki şartı göz önünde tutmak zorundadır.

a) Mukavim olma şartı

Yani elemanın boyutlarını o şekilde tayin edecektir ki, eleman kendisine tesir eden dış kuvvetlere mukavemet etsin. O halde bu şart elemanın kesitinin et kalınlığının fazla olmasına sebep olur.

b) Ekonomi şartı

Yani elemanın ucuza mal edilmesidir. Bu şartta elemanın et kalınlığının daha az olmasıyla daha az malzeme kullanılır.

Mühendis bu iki zıt şartın en uygun çözümünü arar.

Mukavemet bilgisi matematikten ve malzeme bilgisinden çok yararlanır. Deneylere önem verir. Bazı kabuller neticesinde bulunan formüllrin deney sonuçlarına uygun olup olmadığına bakılır.

Sonuç olarak;

Mukavemet cisimlerin (malzemenin) kesitlerinde meydana gelen iç kuvvetlerin elastik cisimlerin kesitlerinde nasıl dağıldıklarını, birim kesit alanına düşen kuvveti, yani gerilmeyi, elastik cisimlerin kuvvetler etkisi altında nasıl ve ne kadar şekil değiştirdiklerini (deformasyonlarını = uzama, kısalma, sehim, eğilme, burulma, burkulma) miktarını araştırır.

DIŞ KUVVET

Bir cisme diğer cisimler tarafından yapılan etkiye dış kuvvet denir.

a) Doğrudan doğruya belli olanlar; (Kendi ağırlığı, üzerine yüklenmiş ağırlıklar, diğer kuvvetler)

b) İrtibatlardan gelenler (mesnet tepkileri) Cisimlerin diğer cisimlere bağlanmasından meydana gelen

↳ Döşemenin kirişe
↳ Kirişin kolona
↳ Kolonun temele
↳ Temelin zemine
↳ Balkonun döşemeye

İÇ KUVVET

Bir cismin iki parçasının birbirine yaptığı etkiye de iç kuvvet denir.

Dış kuvvetlerin tesiri altındaki bir cisim şu zorlamalarla karşı karşıya kalmaktadır.

1. Normal kuvvet (çekme, basınç)
2. Kesme kuvveti
3. Eğilme momenti
4. Burulma momenti → Burkulma momenti
5. Döndürme momenti [1].

Mekaniğin çeşitli yönlerden sınıflandırılması mümkündür. Eğer uğraştığı cismin fizik halini göz önüne alarak bir sınıflandırma yaparsak, mekanik üç ana guruba ayrılır:

1. Katı cisimlerin mekaniği;

2. Sıvıların mekaniği;

3.Gazların mekaniği.

Mekaniğin bu üç dalı da mühendisliğin çeşitli kollarında ayrı ayrı önem taşır.

Katı cisimler, dış yüklerin etkisi ile az veya çok şekillerini degiştirirler. Teknik problemlerin pek çoğunda bu şekil değiştirmeler küçüktür. Şekil değiştirmelerin tamamen ihmal edilebileceği pek çok problem vardır. Bu nedenle ideal bir cisim olan rijit cisim tanımlanır: ***Rijit cisim***, dış yüklerin etkisi ile herhangi iki noktası arasındaki uzaklığı değişmeyen cisimdir. Bu ideal cismi konu alan mekaniğe rijit cisimler mekaniği adı verilir.

Katı cisimler kuvvetlerin etkimesi sonucunda şekillerini değiştirdikten sonra rijitleşmiş kabul edilir ve bunlara rijit cisimler mekaniğinin yöntemleri aynen uygulanır. Bu kabul, katı cisim mekaniğinin dayandığı ilkelerden bir tanesidir ve ***rijitleme*** adını alır.

Katı cisimlerin yükler altında şekil değiştirmesi, kullanılan konstrüksiyon malzemesinin cinsine bağlı olarak çeşitli özellikler gösterir. Yumuşak çeliğin**,** fontun, betonun, kilin aynı yük altındaki şekil değiştirmeleri farklıdır. Bir çok durumlarda yükler kaldırıldıgı zaman cisim ilk haline geri döner. Malzemenin bu davranışına ***elastiklik*** adı verilir. Yükler kaldırıldıktan sonra cisim ilk haline dönmez ve şekil değiştirmiş olarak kalırsa bu davranışa da ***plastiklik*** denir.

Malzemenin pek çoğunda yükün bir sınırına kadar elastik davranış görülmektedir. Plastik davranış gösteren ve göstermeyen malzemeler vardır. Çeşitli malzemenin özelliklerini kapsayacak çok geniş bir mekanik geliştirmek imkânsız olduğundan bir ideal malzeme tanımlayıp onun mekaniğini kurmaktan başka çare yoktur. Elastik cisimler, elastoplastik-cisimler, viskoelastik cisimler, v.b. bu tip ideal cisimlerdir. İşte bu ideal cisimlerin mekaniği, bu arada malzemenin pek çoğunun ortak özelliğini yansıtan elastik daimlerin mekaniği bunların içinde mühendis için en önemli bölümdür. Bu kitabın konusunu da esas itibariyle elastik cisimler teşkil edecektir. Elastoplastik cisimlere de az miktarda yer verilecektir.

Elastik cisimlerin mekaniğini konu alan bilim dalına ***elastisite teorisi*** denir. Yalnız elastisite teorisinde inceleme yolu değişiktir. Orada problem, matematik açısından göz önüne alınır, denklemler kurulur ve çözüm yolu aranır. Bu teori pratik mühendislik hesapları için elverişli değildir. Ancak, bir yandan teoriden, bir yandan deneylerden elde edilen sonuçlara dayanılarak varılan basit kabuller, pratik problemlerin çözümü için bizim inceleyeceğimiz bir bilim dalı ortaya çıkarmıştır. Her ne kadar buna mukavemet adı verilmekte ise de, cisimlerin mukavemetini başka yoldan inceleyen maleme bilgisi ile karıştırılabileceği için bu ad yanlıştır. Mukavemet yerine katı cisimlerin teknik mekaniği veya elastomekanige giriş gibi bir ad verilmesi belki daha uygun olacaktır.

Katı cisimlerin teknik mekaniğinde incelenen problemlerden biri cismin dış yükler altındaki davranışıdır. Dış yüklerin etkisi ile cismin içinde iç kuvvetler meydana gelir. Bir konstrüksiyonda bu iç kuvvetlerin malzemenin dayanma sınırını aşmaması gereklidir. Bu da mühendisin vereceği uygun boyutlarla sağlanır, işte bu dersin başlıca amacı, boyutlandırmayı sağlamak üzere iç kuvvetlerin hesabıdır. [2]

Mukavemet ve ilgili diğer bilim dalları

Mukavemet yukarda anlatılan ödevini yapabilmek için diğer birçok bilim dallarından faydalanmak zorundadır; bu arada rijit cisimler mekaniği başta gelir. Fakat mukavemetin uğraştığı malzemenin, dış yük altındaki davranışı göz önünde tutularak, rijit cisim mekaniğinin, yalnız ortamın özelliği ile ilgili olmayan teoremlerinden faydalanmak gerekeceğine dikkat etmelidir. Bunlar arasında denge şartları başta gelir.

Mukavemet, denel esaslara dayanan bir bilim dalıdır, incelediği cismin gerçek özelliklerini tanımak, bilmek zorundadır; bu sebeple malzeme deneme bilgisinden elde edilen sonuçlardan faydalanır. Malzeme özellikleri arasında şekil değiştirme ile ilgili olan ve mekanik özellikler adını alanlar, mukavemet için ön plânda gelir. Kısaca söylemek gerekirse, şekil değiştirme ve kuvvet mekanizmasıyla uğraşan malzeme mekaniği veya modern adı ile reoloji ilgili bilim dalları arasında önemli yer tutar.

Mukavemeti, konusu itibarile, şekil değiştiren cisimler mekaniğine sokmuştuk. Yalnız bir mekanik dalında, konu işlenirken, kullanılan metodun kesinlik derecesi farklı olabilir; böyle bir durum, konuları aynı olan, cisimlerin mukavemeti ile elastisite teorisinde vardır. Pratik amacı dolayısıyla, sırf konuyu sadeleştirmek için, mukavemet bahsinde birçok kolaylaştırıcı varsayımlar yapılır, bundan ötürü varılan sonuçlar yaklaşıktır. Elastisite teorisi aynı probleme daha kesin bir analiz metodu uygular; dolayısıyla elde edilen çözüm diğerinden daha kesin olur.

Birçok halde, yeter yaklaşıklık elde ettiği için, sonuca daha hızla varan elemanter mukavemet metodları, mühendisler tarafından elastisite teorisine tercih edilir. Fakat kesin teori, sonuçları kontrol bakımından, hiç bir zaman gözden uzakta tutulamaz, ayrıca yeter yaklaşıklığın sağlanamadığı hallerde, elastisite teorisine baş vurmaktan başka çare de yoktur.

Mukavemetin faydalandığı dallardan biri denel elastisitedir. Karışık birçok problemin çözümü, model yardımı ve ölçü metodlarıyla bulunur [4].

Mukavemetin kısımları

Her mekanik dalında olduğu gibi burada da konuyu iki büyük parçaya ayırmak kabildir. Birine. elasto-statik adı verilir ve denge problemlerini kapsar. Diğeri ise yapı elemanlarının ivmeli hareketlerinden doğan atalet kuvvetlerinin etkisini araştırır ve elastokinetik adını alır, Bu son kısım, özellikle makine mühendisliğini ilgilendiren problemlerle uğraşır.

Tarihçe

Mukavemetin, çok gerilere gitmeyen tarihine ait burada kısa bir bilgi ile yetinmek istiyoruz.

Kirişlerin ilk eğilme problemi ile Galilei (1654–1722) uğraşmıştır, fakat o, kirişte çekme ve basınç gibi iki bölgenin bulunduğunu fark etmemiştir.

Kuvvet ve şekil değiştirme arasındaki ilk matematik bağıntı Robert Hooke (1635–1703) tarafından kuruldu. Eğilmeye çalışan kirişte iki çeşit normal gerilme bulacağını ilk fark edenler arasında Mariotte (1680) ve Leibnİtz (1684) den bahsetmek gerekir.

Bernoulli 1694 de eğrilik ile moment arasındaki orantılılığı, ileri sürdü. Aynı bilgin kiriş kesitlerinin eğilmede düzlem kalması gibi önemli hipotezi 1705 de ortaya attı.

Leonhard Euler (1707–1783) elastik eğri ve ona dayanan elastik stabilite problemlerini 1744 de çözdü.

Kiriş teorisini geliştiren ve çeşitli mühendislik problemlerinin çözüm metodlarını ortaya koyan Navier (1785–1836) dir.

Mukavemet ve Elastisite teorisinin gelişmesi için büyük çabalar sarfeden diğer isimleri şöyle sıralamak kabildir: Poisson (1781–1840), Cauchy (1789–1857), de Saint-Venant (1797–1886), C. Maxwell (1831–1879), Kirechh off (1838–1907), Wöhler (1819–1914), Betti (1823–1892), O. Mohr (1835–1918), A. Castigliano (1847–1925) ve Engesser (1848–1891). [4].

MEKANİK:

a) 1. Katı cisimlerin mekaniği
2. Akışkanlar mekaniği

b) 1. Rijit cisimler mekaniği
2. Şekil değiştiren cisimler mekaniği

c) 1. Sürekli ortamlar mekaniği
2. Parçacıklı (Kuantum) mekaniği

d) 1. Newton (vektörel) mekaniği
2. Analitik (Lagrange) mekaniği
3. İstatistik mekanik [1].

Cisimlerin mukavemeti esas itibarile, şekil değiştiren cisimlerin mekaniğidir; yalnız güdülen amaç boyutlandırma adı verilen belirli tip mühendislik problemlerini çözmek olduğu için, daha çok tatbikî mekanik kategorisine girer.
Mühendis, tasarlayacağı her çeşit yapı elemanına boyut verirken, gözönüne alacağı en önemli noktalardan biri de, bunların dış etkenlere dayanmasını sağlamaktır. İşte ***cisimlerin mukavemeti*** ve bazen de ***mukavemet*** adı verilen bu bilim dalı bununla ilgili esas ve metotları hazırlar.

Mühendis, tasarlayacağı her çeşit yapı elemanına boyut verirken, göz önünde bulundurmak zorunda olduğu önemli noktalardan biri de, bunların dış etkilere karşı dayanmasını sağlamaktır. İşte, cisimlerin mukavemeti ve bazen de sadece mukavemet adı ile anılan bilim dalı, bu yolda gerekli esas ve metotları hazırlar.

Boyutlandırma, daima birbirine zıt olan, şu iki şartı uyuşturmağa çalışır.
1. Emniyet şartı
2. İktisat şartı

Yapı, hiçbir zaman etkiyen dış kuvvetlere tam dayanacak şekilde boyutlandırılmaz, bunların geçici de olsa, muhtemel artışlarını ve yapının emniyeti ile ilgili diğer faktörleri de hesaba katmak gerekir; bütün bu noktalar, boyutların arttırılmasını, diğer bir deyimle yapının ağır ve rijit olmasını icap ettirir -emniyet düşüncesi-

İktisat şartına gelince, lüzumsuz malzeme ve işçilik sarfından kaçınarak, yapı elemanlarına yeter boyut vermeyi öngörür.

Bu iki esas şart yanında, yapıya uygun form vermek te hiçbir zaman ihmal edilmemelidir. Eser doğru olduğu kadar güzel de olmalıdır; terim eğer yerinde ise, bu üçüncü şarta da
3. Estetik şart denilebilir.

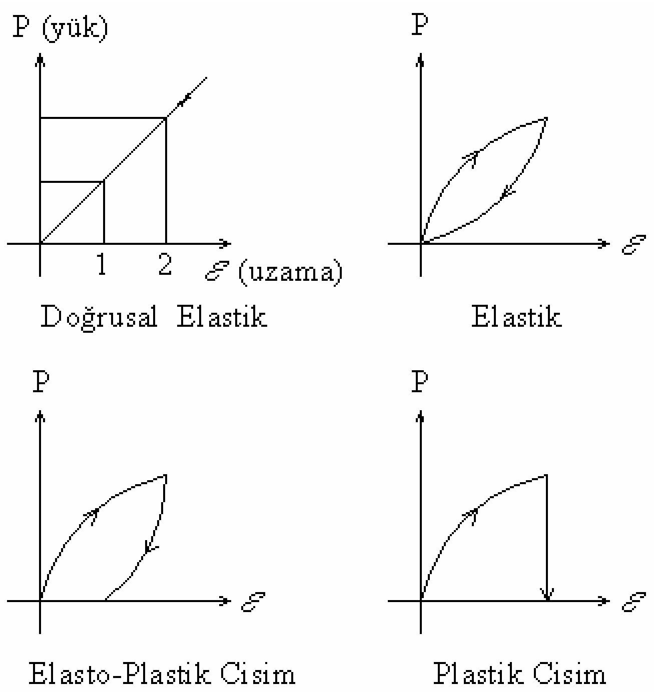
Mukavemet, her teknik problemde bütün şartları gerçekleştirecek optimum bir çözüm arar. [4].

Elastisite: Sürekli ortamlar mekaniği içinde katı cisimlerle ilgilenen mekaniktir. Mukavemet olur. Matematiksel kesinliği vardır. Bir çok kabuller yapılan yaklaşık bir mekaniktir. Uygulamalı ya da teknik mekanikte denir. [1].

Mukavemeti elde etmek için yapılan basitleştirme ve ideal kavramlar:

1. Ortamın yapısı için kabul edilen ideal kavramlar

Mukavemette kullanılan ideal kavramlar arasında tam elastik cisim ve tam plastik cisim sınırda olan iki cismi gösterir.[1].



Şekil [3].

Elastik Cisim: Bir cisme dış yükleri uyguladığımızda cisim şekil değiştirme yapacaktır. Dış yükler kalktığında cisim 1. ci şekline dönüyorsa buna elastik cisim denir. Tam elastik özellik, cisimde şekil değişmenin dış etki ile birlikte geri dönmesi demektir.

Bunun zıddına, ***tam plastik cisim*** de de, dış tesirler ortadan kalktığı halde de yaptıkları şekil değiştirme olduğu gibi kalır.

Yapıda kullanılan cisimler genel olarak, bu iki ideal durumun arasında bulunur; yani dış etkiler geri dönerken, şekil değiştirmelerin bir kısmı geri döner bir kısmı kalır. Buna ***elastoplastik cisim*** denir.

Elastoplastik Cisim: Dış yükler kalktığında cisim ne son şeklinde kalıyorsa ne de ilk şekline dönüyorsa cisme elastoplastik cisim denir.

Homogen: Eğer ele aldığımız cismin özellikleri her noktası için aynı ise buna homogen cisim denir.

İzotrop: Eğer cismin özellikleri cismin içindeki doğrultuya bağlı değilse buna izotrop cisim denir.

Mukavemet için önemli kavramlardan biri de, dış etkilerle şekil değiştirmeler arasıdaki bağıntı, şekil değiştirme kanunudur. İlk basit kanun Robert Hooke tarafından verilmiştir.

Hooke Yasası: "Kuvvet ne kadarsa uzama o kadardır" Böyle cisimlere hooke yasasına uyan cisimler denir. Buna göre kuvvetle şekil değiştirme arasında lineer bir bağıntı olduğu kabul edilmektedir. Şekil değiştirme kanunu lineer olan cisimlere kısaca ***Hooke Cismi*** adı verilir.

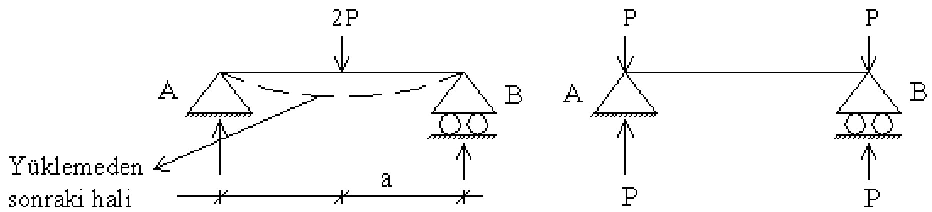
2. Şekil değiştirmenin kinematiğinde yapılan basitleştirmeler ve ideal kavramlar:

a) Rijitleştirme İlkesi: Denge denklemleri cismi şekli değiştirdikten sonra rijit hale geldiği kabul edilerek uygulanılır.

b) Ayırma İlkesi: Cismin dış etkilere uygunluğunu anlamak için, bir düzlemle herhangi bir yerinden kuramsal olarak kesilir. Düzlemin ayırdığı kısımlardan sadece bir parçasına denge denklemleri uygulanır. Cismi iki parçaya ayırıp, bir tarafı atarak kalan kısmın incelenmesine ***ayırma prensibi*** adı verilir. Denge denklemleri cismin bütünü için geçerli ise, her parçası içinde geçerlidir.

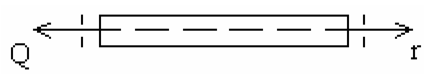
c) Eşdeğerlik İlkesi: Statikçe eşdeğer olan mukavemetçe eşdeğer olmayabilir. Statik yönden eşdeğer olan kuvvetler, şekil değiştirme yönünden de eşdeğer değillerdir.

Örnek: İki ayrı yükleme statik yönden eşit olduğu halde biri kirişte şekil değiştirme doğurur. Diğerinde ise hiçbir şekil değişikliği olmaz.



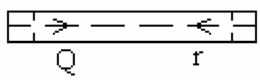
Şekil ???

Örnek: Rijit cisim mekaniğinde kuvvet, kayan bir vektör sayıldığı halde, şekil değiştiren cisim mekaniğinde kuvvetin kaymasına izin verilmez.



Şekil ???

Bu kuvvetler çubuğu uzatmaya zorladığı halde, kuvvetler kaydırılacak olursa, yani



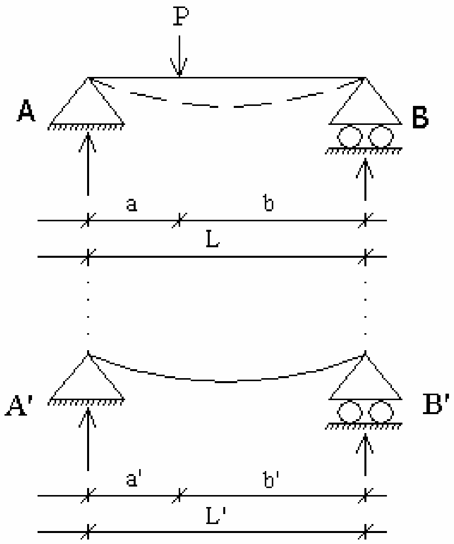
Şekil ???

Böyle olursa şekil değiştirme tamamen ters bir hal alır. Çubuk kısalır.

Saint Venant İleride görülecek mukavemetçe eşdeğerlilik.

d) Birinci Mertebe Teorisi: Rijitleştirme ilkesinin tersine mukavemette bağ kuvvetleri hesaplanırken cismin ilk hali yani yükleme yapılmadan önceki durumu rijit olarak kabul edilir. Yani statikte kullanılan bağ kuvvetleri bulma işlemleri aynen uygulanacaktır.

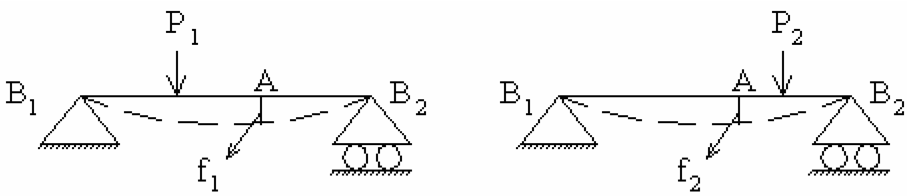
Bir çok halde, cismin şekil değiştirmiş durumu ile ilk durumu arasındaki fark çok küçüktür. Bu nedenle denge denklemleri yazılırken gerekli boyutlar şekil değiştirmemiş durum üzerinden alınır.



$$\sum M_a = P.a - B.L$$
$$P.a = B.L$$
$$B = P.\frac{a}{L}$$

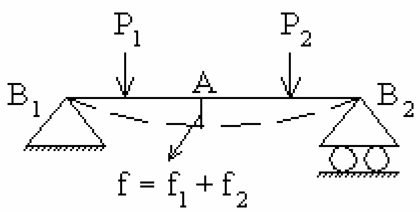
Şekil ???

e) Süperpozisyon (lineer toplama) İlkesi: Bir elastik sistemin iki ayrı yüklemesini gözönüne alalım.



Şekil ???

Her iki yüklemenin birden yapıldığı durumda



Aynı A noktası f kadar yer değiştirsin. Eğer sistemin bu üç yüklemesi arasında

$$F = f_1 + f_2$$

gibi bir bağıntı varsa, burada ***süperpozisyon kanunu geçerliktedir*** denir.

Süperpozisyon kanunun geçerli olması için, şekil ve yerdeğiştirmelerin küçük ve cismin Hokke kanununa uygun bir şekil değiştirme yapması gerekmektedir.

"Mukavemetin amacı mühendislik yapılarına dış yükler altında uygun boyut vermektir"

BÖLÜM 2. İÇ KUVVETLER ve NORMAL KUVVET HALİ

DIŞ KUVVET

Cisme diğer cisimlerin yapmış olduğu etki olarak tanımlanabilir. Bu etkiler iki kısma ayrılabilir:

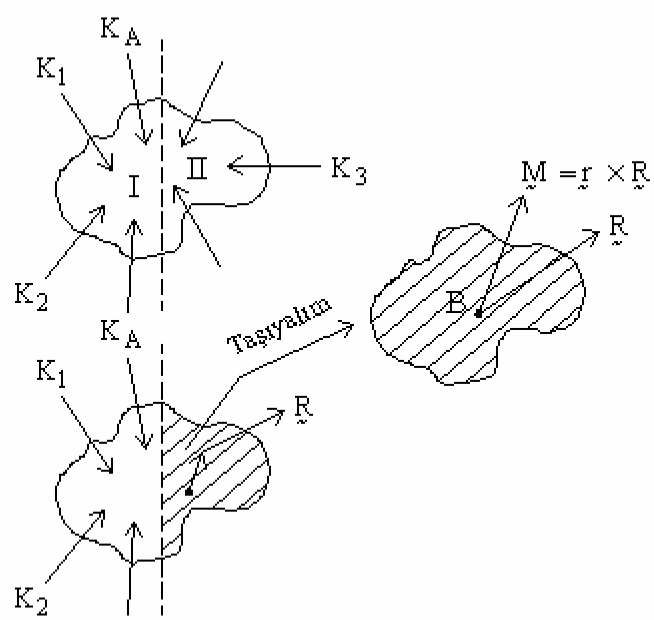
a)Doğrudan doğruya belli dış kuvvetler

b) Bağ kuvvetleri (Reaksiyon, mesnet kuvvetleri)

Birinci sınıftaki kuvvetler, bilinen verilmiş kuvvetlerdir. İkincisi ise cisimlerin arasındaki bağdan doğar. Bağın şekli ve denge fikri esas rolü oynar.

İç kuvvet ise bir cismin çeşitli parçaları arasındaki etki ve tepkiden ibarettir. Mukavvette bir cismin tüm durumu hakkında fikir edinebilmek için, cismi parçalara ayırmak ve her parçayı sanki diğerinden bağımsız, ayrı bir cisim olarak düşünmek gerekir.

İç kuvvet, cismin parçalarını belirten ayırma yüzeyi ve kesit kavramından ayrı olarak düşünülemez. [2].



Şekil ???

Cisim dengededir. Hayali olarak keselim. Sistem dengede olduğundan I ve II dengededir. Kestiğimiz yerde dengeyi sağlayabilmek için diğer kısma bir takım kuvvetler etkimelidir. Bunların toplamına ***iç kuvvet*** denir. Bir cisme diğer bir cisim tarafından yapılan tesire ***dış kuvvet*** denir.

$$Lim \frac{\Delta P}{\Delta F} = P$$ gerilme

$$\Delta P \rightarrow 0$$

ΔF'i büyük olarak çizelim.

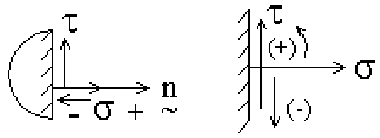
σ = Sigma

τ = To

P gerilme vektörünün kesitin normali üzerindeki bileşeni (σ) harfiyle gösterilir ve ***normal gerilme*** denir.

P gerilme vektörünün kesit içindeki ve kesitin normaline dik bileşenine de ***kayma gerilmesi*** denir ve τ (to) ile gösterilir.

Kesite yandan bakalım:



Şekil ???

Kesit içinde birim alana gelen kuvvete ***gerilme*** denir.

τ ve σ'nın İşaretlerinin Bulunması:

(σ) Normal gerilme kesitin normali yönündeyse pozitif (+) ters yönündeyse (-) negatif olur.

(τ) Kayma gerilmesi kesitin normali saat ibresinin tersi yönünde 90° yatırıldığında kayma gerilmesi ile aynı yönde geliyorsa (+) ters yönde geliyorsa (-) olur.

Çubuk:

Katı cisimlerin teknik mekaniğinde inceleme yolu, cismin geometrisine yakından bağlı olmaktadır. Boyutları bakımından özel olan cisimler için tamamen farklı bir inceleme yolu izlenmektedir. Bu tür özel cisimlerden biri çubuklar, öteki plâk ve kabuklardır.

Çubuklar, iki boyutu üçüncü boyutunun yanında küçük olan cisimlerdir. Bu küçüklük oranı genel olarak bir mertebe küçük olma şeklinde söylenebilir, yani 1/10 dur.

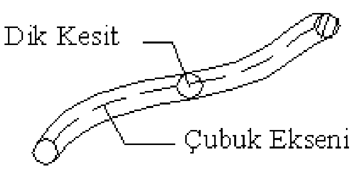
Çubukların iki öğesi vardır:

1) Çubuk ekseni. Bu genel olarak bir uzay eğrisidir.

2) Çubuğun enine kesiti. Kısaca kesit de denilen enine kesit kapalı bir alan parçasıdır.[2]

Kesitin ağırlık merkezi çubuk ekseniyle üst üste düşer ve kesit düzlemi eksen eğrisine diktir.

(Şekil).



Her en kesitinin ağırlık merkezinin geometrik yerinden geçen eğriye ***çubuk ekseni*** denir.

Çubuk eksenine dik olan düzlemlerle kesildiğinde meydana gelen kesite ***dik kesiti*** denir.[1]

Teknikte çubuklar, eksen eğrisinin şekline ve çubuklara gelen kuvvetlere göre çeşitli adlar almaktadır. (Şek. l-2a).

Eksenin şekline göre:

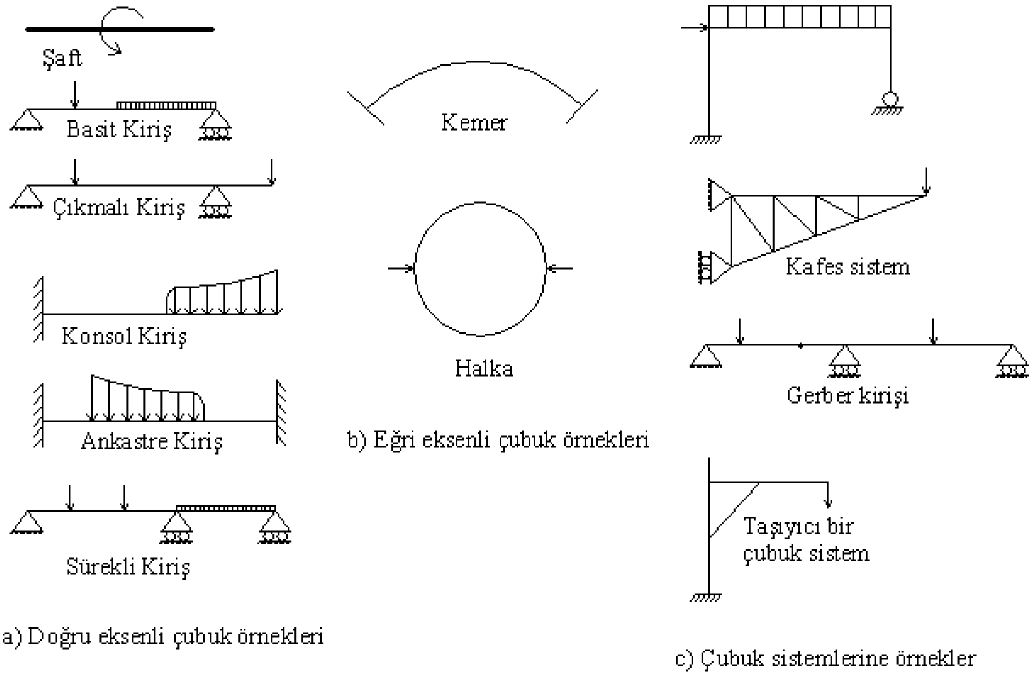
1. Doğru eksenli çubuklar, etkiyen kuvvete göre kiriş, mil, şaft, kolon vb. adlar alır.

2. Eğri eksenli çubuklar, kemer, halka gibi adlar alırlar.

En kesitinin durumuna göre:

1. Sabit eksenli çubuklar

2. Değişken kesitli çubuklar [2]



a) Doğru eksenli çubuk örnekleri

b) Eğri eksenli çubuk örnekleri

c) Çubuk sistemlerine örnekler

Şekil [2].

Bir boyutu diğer iki boyutu yanında çok büyük olan elemanlara ***çubuk*** denir. Çubukların 2. boyutu 3. boyutu yanında küçük olduğu için eksenleriyle gösterilebilir. Bir çubuğun belli olabilmesi için ekseninden başka en kesitinin ve boyunun bilinmesi gerekir. Çubuğun ekseni en kesitlerin ağırlık merkezinin üzerinde bulunduğu bir eğridir. En kesit eksene dik kesit olarak tanımlanır.

Birden fazla çubuğun birbirine bağlanması ile meydana gelen çubuklara ***çubuk sistemi*** denir. Eğer bir sistemde çubuklar rijit bağlı ise bunlara, ***çerçeve*** adı verilmektedir. Mafsalla bağlandığı kabul edilen ve yükleri bu bağ noktalarına etkiyen çubuk sistemlerine ***kafes sistemler*** denir. Bunlar dışında olan çubuk sistemleri de vardır.

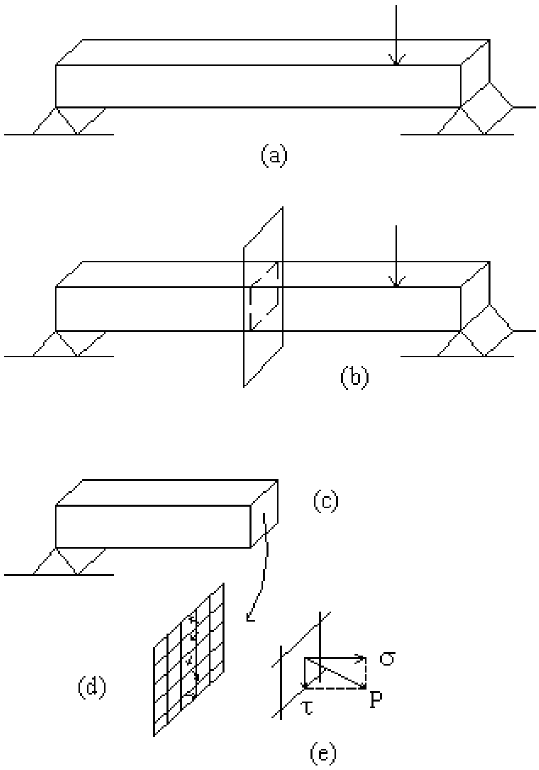
Çubuğun kesiti çeşitli geometrik biçimlerde olabilir. Bu biçime göre dikdörtgen, daire, halka vb. kesitli çubuk adı verilir. Çubuk kesiti çubuk ekseni boyunca sabit veya değişken olur. değişken kesitli çubuklarda da kesit değişimi ani veya sürekli olabilir.

Plak ve ***kabuklar,*** iki boyutu üçüncüsünün yanında büyük olan cisimlerdir. Bina döşemeleri, kubbeler, hazneler, kazanlar bu tip cisimlere birer örnektir.

Boyutları yönünden bu iki özel tipe uymayan çubuklar için genel çözüm yöntemlerinden yararlanmaktan başka çare yoktur.[2]

Çubuğa etkiyen dış yükler çubukta iç kuvvetler meydana getirir. Bu kuvvetleri görünür hale getirmek için çubuk hayali iki parçaya ayrılır. Her zaman kullanacağımız bu temel ilkeye ***ayırma ilkesi*** adı verilir. [1].

Kuvvetlerin etkisinde bulunan bir çubuk gözönüne alalım. Çubuğu bir kesit boyunca ikiye ayıralım.



Parçalardan bir tanesi, kendisine etkiyen dış kuvvetlerin etkisi altında dengede olmayacaktır. Öteki parçadan o parçaya gelen iç kuvvetleri de hesaba katarsak denge sağlanır. Bu iç kuvvetler bütün kesit yüzeyi üzerine yayılmıştır. Değerleri de genellikle kesit içinde noktadan noktaya değişiktir. Bir noktadaki değeri bir limit işlemiyle tanımlanır: ΔA alanına gelen kuvvet ΔP ise

$$\lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta P}{\Delta A} = \overline{p}$$

Değerine ***gerilme*** denir. Gerilmenin boyutu K/L^2 olduğuna göre kg/cm^2 veya kg/mm^2 gibi birimlerle ölçülür. Kısaca gerilme birim alana gelen iç kuvvettir.[2]

Düzlemsel Yükler

İç Kuvvetlerin Hesabı Kesim Yöntemi

Doğru eksenli bir çubuğa etkiyen bütün dış kuvvetlerin aynı düzlemde bulunduğunu kabul edelim. Kuvvetlerin düzlemini *yz* düzlemi olarak alıyoruz. Çubuğun statikçe belirli şekilde mesnetlendiği kabul edildiğine göre bağ kuvvetleri statikçe bilinen yollarla hesaplanır ve bunlarda aynı düzlemde bulunur. İç kuvvetlerin hesabı yönünden bağ kuvvetleri ile doğrudan doğruya belirli öteki dış kuvvetleri ayırt etmeye gerek yoktur. Biz daima bağ kuvvetlerinin hesaplanmış olduğunu kabul edecek ve dış kuvvetler yönünden dengede olan bir çubuktan hareket edeceğiz. Ondan sonra iç kuvvetlerin bulunmasını istediğimiz kesitten çubuğu iki parçaya ayırırız. Soldaki veya sağdaki parçayı bir serbest cisim olarak göz önüne alırız. Kesitteki iç kuvvetler de hesaba katılmak şartıyla göz önüne alınan parça dengede olmalıdır. Düzlemde bulunan kuvvetler için üç denge şartı bize N, T, M bilinmeyenlerini hesaplamak olanağını sağlar. Çubuğu yeteri kadar çok kesitten ayırarak bütün çubuk boyunca iç kuvvetler hesaplanır. Bu, kesim yöntemidir.

Kesim yönteminin pratik uygulaması için önce iç kuvvetlerin işaretli olanlarını yeniden gözden geçirelim. Pozitif yönleri düzlemsel hale indirgersek durum elde edilir.

İç kuvvetleri hesaplarken göz önüne alınan çubuk parçasına bilinmeyen iç kuvvetleri pozitif yönleri ile koymalıdır. Böylece hesap sonucunda pozitif çıkan büyüklüklerin pozitif, negatif çıkanların negatif olduğu anlaşılmış olur.

Çubukta iç kuvvetler eksen boyunca bütün noktalarda hesaplanır. Sonra bunların grafikleri çizilir. Bu grafikler çubuk üzerindeki her noktada N, T, M değerlerini (işaretli olarak) gösterir ve ***normal kuvvet diyagramı, kesme kuvveti diyagramı*** ve ***eğilme momenti diyagramı*** adını alır.

Diyagramların çizimi için çubuğu kaç noktada kesmek gerektiği akla gelen bir sorudur. Çubuğa etkiyen tekil yükler; yayılı yüklerin başlangıç, bitim ve yayılma kanununun değiştiği noktalar çubukta bölgeler ayırır. Her bölgede bir kesim yapmak, iç kuvvetleri *z* koordinatının fonksiyonları olarak hesaplamak ve sonra o bölge içinde *z*'yi değiştirmek suretiyle kesim sayısını minimumda tutmak mümkün olur. Tekil yüklerin etkidiği noktalarda iç kuvvetlerde süreksizlikler olduğundan kesimi tam o noktalarda yapmamalıdır. Hesabın yapılışı ve diyagramların çizilişi örnek problemlerden izlenebilir.

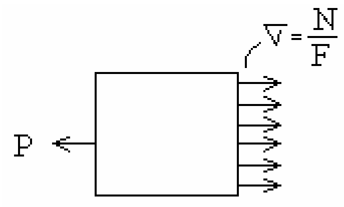
Hesabın yapılış adımlarını bir daha özetleyelim:

1. Bağ kuvvetleri hesaplanır.
2. Yükün değişmesine göre çubukta bölgeler ayrılır. Her bir bölgede bir kesim yapılır. Çubuğun bir parçası göz önüne alınır. Kesitteki yüzeye iç kuvvetler pozitif yönlerde konur ve *z*'nin fonksiyonu olarak hesaplanır.
3. *z*'ye bölge içinde değerler vererek iç kuvvet diyagramları çizilir.

NORMAL KUVVET

Bir çubuk yalnızca ekseni doğrultusundaki dış kuvvetlerin yani çekme ya da basınç kuvvetlerinin etkisindeyse kesitlerde meydana gelen iç kuvvete ***Normal Kuvvet***, problemede ***normal kuvvet hali*** denir.

Normal kuvvetin işareti: Kesit aldığımızda parça sol tarafta kalıyorsa yani ben parçaya sağdan bakıyorsam Normal kuvvet sağa doğru yani normalin yönünde olur. (+) tersi (-) olur.



Şekil ???

Normal kuvvet halinde gerilme:

$\frac{N}{F} = \sigma$ Gerilme

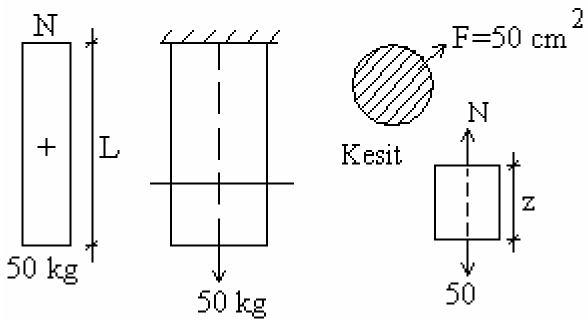
N = Normal Kuvvet

F = Alan

σ = Normal gerilme

Böylece normal kuvvet halinde gerilme, normal kuvvetin kesit alanına bölünmesi ile elde edilmektedir. Bu formülde N pozitif ise gerilmeler pozitif yani çekme, N negatif ise gerilmeler negatif yani basınç olarak çıkar.

Örnek



a)Çubuktaki nornal kuvveti?

b) Çubuktaki gerilmeyi bulunuz?

N = ? σ = ?

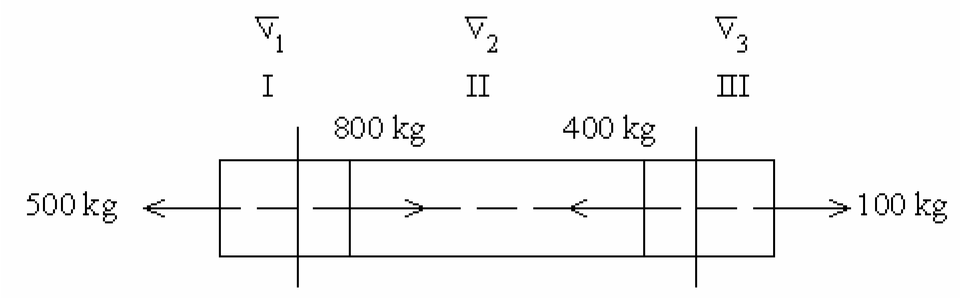
N=? σ=?

ΣFy=0

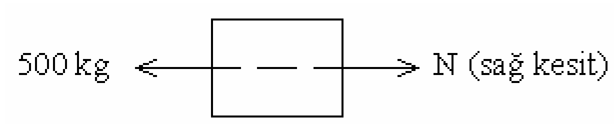
50-N=0 N=50 kg.

$$\sigma = \frac{N}{F} = \frac{50}{30} = 1 kg/cm^2$$

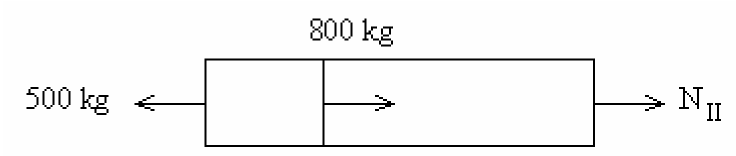
Örnek



Çubuk boyunca normal kuvvet diyagramını çiziniz en büyük normal gerilme çubuğun hangi bölgesinde meydana gelir.

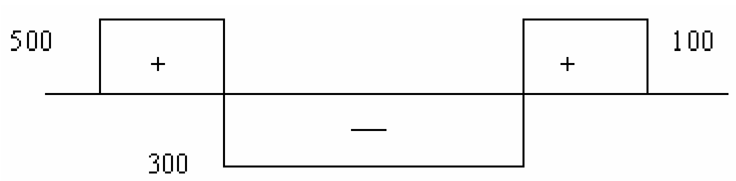


N_I=500 kg (Keserken daima en baş kısmı öneme alacağız)



N_{II} = -800+500=-300

N_{II} = -300



$$\sigma_1 = \sigma_{\max} = \frac{N}{F} = \frac{500}{50} = 10\, kg/cm^2$$

$$\sigma_2 = \frac{300}{50} = -6\ kg/cm^2$$

$$\sigma_3 = \frac{100}{50} = 2\ kg/cm^2$$

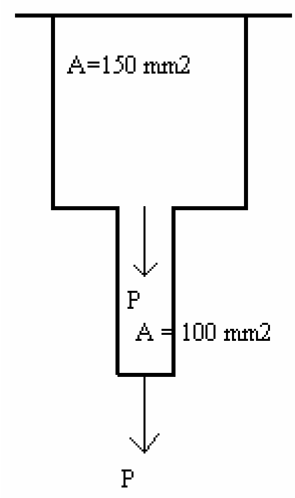
$$\sigma = \frac{P}{A}$$

$$140 = \frac{60.10^3}{A}$$

$$A = 428\ mm^2 = \frac{\pi d^2}{4}$$

d = 23 mm

Örnek:



Şekildeki sistem için σ_{em} = 140 N/ mm^2 verilmektedir. Bu çubuğun emniyetle taşıyabileceği max P yükünü bulunuz?

P_{max} = ?

Çözüm:

$\uparrow \Sigma F_y = 0;$

$A_y - P - P = 0$

$A_y = 2P$

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{2P}{150} = 140 \Rightarrow P = 10.5\,kN$$

$$\frac{P}{100} = 140 \Rightarrow 14\,kN$$

Yukarıdaki eleman 10.5 kN dayanabildiği için P_{max} = 10.5 kN olur.

Boyutlandırma Emniyet Gerilmesi

Yalnız normal kuvvet etkisinde bulunan bir çubuk gözönüne alalım. Gerek N, gerekse F çubuk boyunca sabit veya değişken olabilir. Her durumda da

$$\sigma = \frac{N}{F}$$

Formül bize çubuk üzerinde gerilmenin hesaplanmasına olanak sağlar. N ve F'nin her ikisininde sabit olduğu hallerde çubuk boyunca σ sabittir; aksi halde σ çubuk üzerinde çeşitli yerlerde çeşitli değerler alır.

Malzemeler en genel olarak iki farklı grupta toplanabilir:

1. Sünek (düktil) malzeme: Bunlara yükün belirli bir sınırında malzemede çok büyük şekil değiştirmeler meydana gelir. Buna akma denir.

2. Gevrek (frajil) malzeme: Bu tip malzemede akma olmaz. Belirli bir σ gerilmesinde malzeme birdenbire kırılır.

Her iki hali bir araya toplayarak malzemeler için bir σ_m sınır gerilmesi olduğunu söyleyebiliriz.

Ancak bir konstrüksiyonda gerilmelerin σ_m sınır gerilmesine kadar çıkması istenmez. Bu nedenle σ_m sınır gerilmesi, emniyet katsayısı denilen, birden büyük bir n katsayısına bölünür. Böylece elde edilen gerilmeye ***emniyet gerilmesi*** denir. Malzemelerin yeteri kadar emniyetli çalıştırılmaları aşağıdaki sebeblerden doğmaktadır.

1. Dış kuvvetler ekseriya tam olarak belli değildir.
2. Taşıyıcı elemanın her yerinde aynı özellik bulunmayabilir.
3. İç kuvvetlerin hesabında yapılan kabullerden dolayı sonuçlar yaklaşıktır.
4. İmalatlarda bir takım hatalar ortaya çıkabilir.
5. Zamanla elemanın kesitinde zayıflama olabilir.
6. elemanlar uzun zaman çalışması neticesinde yorulmakta dolayısıyla sınır gerilmelerinde değişiklik olmaktadır.

σ_m=Mukayese gerilmesi

$\frac{\sigma_m}{n}$ n= 2.5 alıyoruz.

$\sigma_{çelik}$ = 1400 kg/cm^2

Pratikte üç tip boyutlandırma problemi söz konusu olur:

Problem 1: Kesit tayini

Çubuktaki N bellidir; malzemenin ne olacağına karar verilmiştir, dolayısıyla σ_{em} de bilinmektedir. Çubuğa verilecek kesitin değeri aranmaktadır.

$\sigma = \frac{N}{F}$, $F \geq \frac{N}{\sigma_{em}}$ σ_{em}= sigma emniyet

Bu bize gerekli kesit alanını verir.

Problem 2: Gerilme kontrolü

Çubuktaki N ve F her yerde bellidir; çubuk malzemesi de bellidir, dolayısıyla σ_{em} bilinmektedir. Çubukta meydana gelen gerilmenin σ_{em}'in altında olup olmadığının kontrolü istenmektedir.

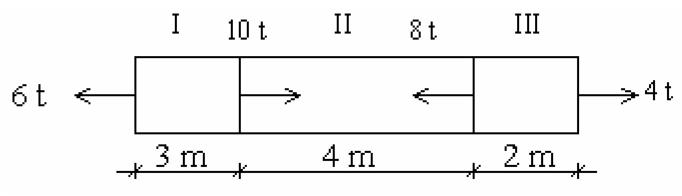
$\sigma = \frac{N}{F}$, $\sigma \leq \sigma_{em}$

Problem 3: Dış yükün hesabı (Normal kuvvet)

F ve σ_{em} bilinmektedir. Çubuğun ne kadar yük taşıyacağı aranmaktadır. Normal kuvvet diyagramı bilinmeyen yük cinsinden çizilir. Gerilmenin en fazla olduğu yerdeki değer, σ_{em} ile karşılaştırılarak taşınacak yüke geçilir.

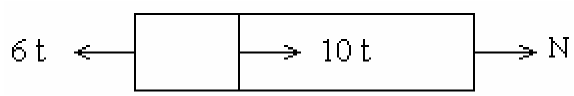
N= σ_{em}. F

Örnek:

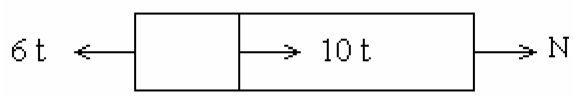


Şekildeki çubuğun kesiti sabit ve malzemesinin emniyet gerilmesi 1400 kg/cm^2 olduğuna göre gerekli kesit alanını bulunuz?

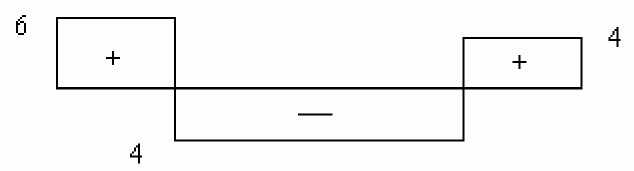
N_1= 6 t



N_2= -4 t

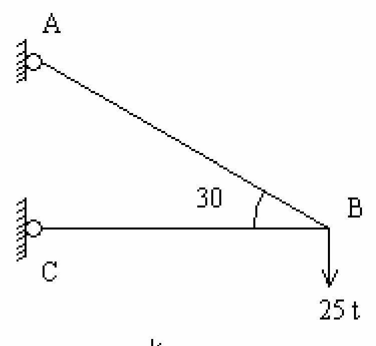


N_3= 4 t

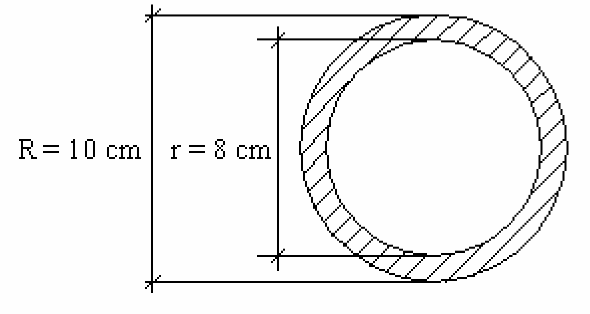


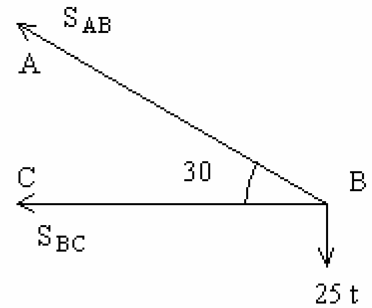
$F_1 \geq \frac{6000}{1400} = 4.3\ cm^2$

Örnek:



Şekildeki sistemde AB çubuğu kesiti şekilde verilen borudan yapılmıştır. σ_{em}= 1400 kg/cm^2 olduğuna göre kesitin yeterli olup olmadığını kontrol ediniz?





$\Sigma Fy = 0$

$\Sigma Fy = -25 + S_{AB} \sin 30^{\circ} = 0$

$-25 = -1/2\ S_{AB}$

$S_{AB} = 50t$

R = Büyük çap

r = Küçük çap

Kesitin alanı

$$F = \frac{\pi (R^2 - r^2)}{4}$$

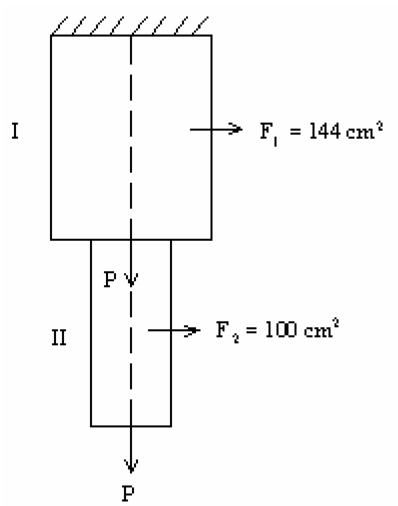
$$F = \frac{\pi (10^2 - 8^2)}{4} = 28.27 cm^2$$

$$\sigma = \frac{N}{F} \qquad \sigma_2 = \frac{5000}{28.27} \Rightarrow \sigma = 1770\, kg / cm^2$$

$\sigma < \sigma_{em}$

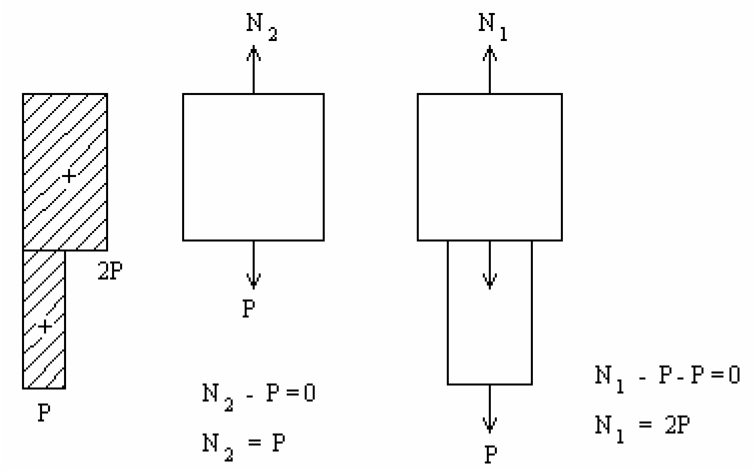
1770 < 1400 (değildir taşıyamaz)

Örnek:



Şekildeki çubuğun taşıyabileceği P yükünü hesaplayınız?

$\sigma_{em} = 100\ kg/cm^2$



$N_1 = 2P$ (I. Bölgedeki gerilme)

$$\sigma = \frac{N_1}{F_1} = \frac{2P}{144} = \frac{P}{72}$$

N_1 = P (II. Bölgedeki gerilme)

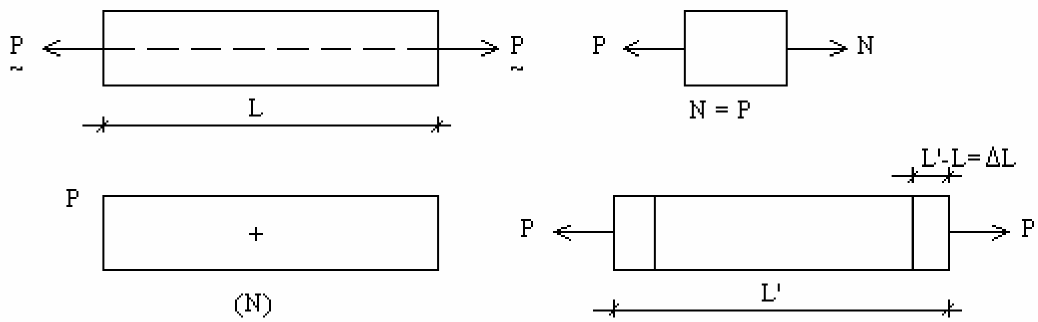
$$\sigma = \frac{N_2}{F_2} = \frac{P}{100}$$

$$\sigma_{em} = \frac{P}{72} \rightarrow 100 = \frac{P}{72}$$

P ≤ 7200 kg

En büyüğünü σ_{em}'e eşitlemeliyiz.

Şekil Değiştirme Hooke Yasası



Sabit normal kuvvet etkisinde bulunan bir çubuk gözönüne alalım.[2] Kuvvetin etkisi ile çubuğun boyu bir miktar uzar. Yeni boyu L_1 olsun. Uzama miktarı ΔL= L'-L dir. Bu miktar çubuğun boyu arttığı için, uzamayı daha iyi karakterize etmek üzere birim boyun uzaması veya uzama oranı diye bir ε (Epsilon) büyüklüğünü tanımlıyoruz.

$$\varepsilon = \frac{l_1 - l_2}{l} = \frac{\Delta l}{l}$$

$$\varepsilon = \frac{l_1 - l_2}{l} = \frac{\Delta l}{l}$$

ΔL = ε.L $\quad \Delta L = L.\frac{N}{EF}$ Uzama miktarı

ε, iki uzunluğun oranı olmak bakımından, boyutsuz bir büyüklüktür. Çubuktaki normal kuvvet çekme yerine basınç olursa çubukta uzama yerie boy kısalması olacağından ε negatif olur. Böylece kısalmaya negatif boy uzaması gözüyle bakabiliriz. O halde

ε= Epsilon (boyutsuz sayı) birim sayılmaz

ε > 0 → çubuk uzar

ε < 0 → çubuk kısalır

N = P

L'= Uzamadan sonraki boyu

ΔL = L'-L (L boyundaki bir çubuğun uzaması)

$$\sigma = \frac{N}{F}$$

Hooke yasası: Uzama ile kuvvet arasındaki ilk bağıntı Hooke tarafından ifade edilmiştir. (1680 yılında) Hooke, uzama ile kuvvetin orantılı olduğunu şu cümle ile söylemiştir; Kuvvet ne kadarsa uzama o kadardır. Hooke kanunu, birim alana gelen kuvvet, yani gerilme ile birim boyun uzaması arasında bir orantılılık vardır şeklinde yorumlayacağız ve aşağıdaki gibi yazacağız:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$$

Buna ***Hooke kanunu*** denir.

$$\frac{\varepsilon}{\sigma} = \frac{1}{E}$$

ε'nun σ'ya oranı sabittir. $\frac{1}{E}$ ile gösterilir. Bu (E) sayısına ***elastisite modülü*** denir.

ε boyutsuz bir büyüklük olduğuna göre E gerilme boyutunda olacaktır. E çoğunlukla kg/cm^2 ile ölçülmektedir.

Artık normal kuvvet halinde ε ile N arasındaki bağıntı yazılabilir:

$$\varepsilon = \frac{N}{EF}$$

Burada N ve F'nin çubuk boyunca değişken olabileceği unutulmamalıdır. EF çarpımına ***uzama rijitliği*** denir. Bu değer büyüdükçe uzama azalır; rijitlik ∞ olunca ε = 0 yani, cisim tam rijit olur.

$$\frac{\varepsilon}{\sigma} = \frac{1}{E}$$

$$\varepsilon = \frac{1}{E}\sigma$$

Çubuk boyundaki uzamayı hesaplamak için

$$\varepsilon = \frac{N}{EF}$$

formülünden yararlanırız. Birim boyun uzaması ε olduğuna göre dz boyundaki kısmın uzaması ε dz olur. Toplam boyun uzaması ise bir integralle bulunur:

$$\delta = \int_0^1 \varepsilon \, dz = \int_0^1 \frac{N\,dz}{EF}$$

Özel olarak N ve F sabit ise bu formül basitleşir ve

$\delta = \dfrac{N\,l}{EF}$ haline gelir.

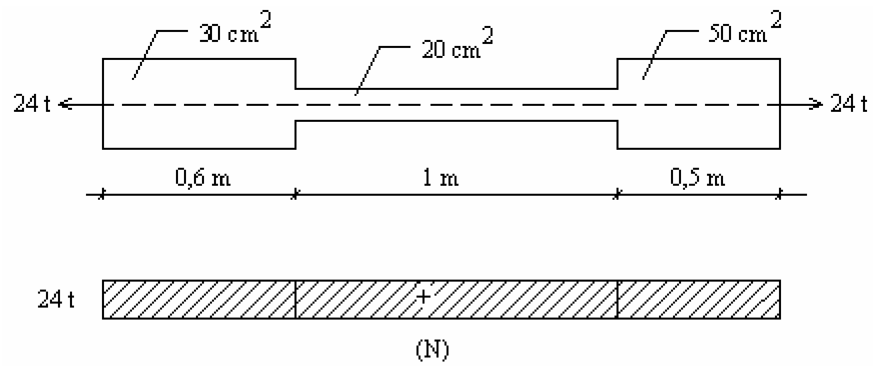
Çubuğun boyunda bir uzama olurken eninde de bir daralma meydana gelir. Genişlikte Δa kadar daralma olmuş ise ***enine daralma oranı***, uzama oranına benzer olarak

$\varepsilon_1 = \dfrac{\Delta a}{a}$ şeklinde tanımlanır. Boydaki uzama ile enine daralma arasında bir bağıntı vardır.

Bu; $-\dfrac{\varepsilon_1}{\varepsilon} = sabit = \upsilon$

Buradaki ν (nü) ye ***Poisson oranı*** denir. Poisson oranıda malzemeye bağlı bir katsayıdır. Basınç etkisindeki bir cisimde hacmin artmıacağı düşüncesi ile Poisson oranının 0 < ν < 0.5 olması gerektiği çıkar.

Örnek



Çubuğun yapıldığı malzemenin elastisite modülü E= 2.10^6 kg/cm^2 dir. Toplam uzamayı bulunuz?

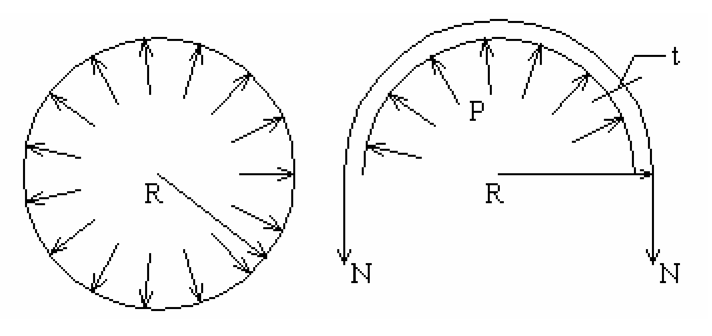
$$\Delta L = \frac{24000.60}{30.2.10^6} + \frac{24000.100}{20.2.10^6} + \frac{24000.50}{50.2.10^6}$$

ΔL= 0.024 + 0.060 + 0.012

ΔL= 0.096 cm

İç basınç etkisindeki ince halkalar (Kazanlar)

İçeriden düzgün bir p (kg/m) yayılı yükü etkisinde bulunan bir halka gözönüne alalım.



Böyle bir halkanın kesitinde yalnız normal kuvvet meydana gelir. Bu normal kuvveti hesaplamak için halkayı bir çap boyunca iki parçaya ayıralım. Düşey denge denklemi

$$-2N+\int_0^{\pi} p\,R\sin\varphi\,d\,\varphi=0$$

verir. İntegrasyon yapılırsa

N = p. R olarak elde edilir.

P.2R = 2N

N = R.P

P → İç basınç

R → Yarıçap

Halkanın kesit alanı F ise gerilme

$$\sigma=\frac{N}{F}=\frac{R.P}{F} \qquad \sigma=\frac{R.P}{F} \qquad \sigma=\frac{R.P}{t}$$

t → Yan kesit alanı

$$\varepsilon=\frac{N}{EF}=\frac{R.P}{t.E}$$

Normal kuvvet etkisi ile halkanın birim boyundaki uzama

$$\varepsilon=\frac{R.P}{t.E}$$ Birim boydaki uzama

$$\Delta R=\frac{P.R^2}{E.t}$$ Yarı çaptaki değişme

Bütün boydaki uzama ise, $2\pi R\varepsilon$ olduğundan

$$\Delta L=2\pi\,R.\varepsilon=2\pi\frac{P.R^2}{E.t}$$ Çevredeki toplam boyca uzama

1 metresinin dayanacağı kadarı olup 2 metre ise 2 ile çarpacağız.)

Örnek:

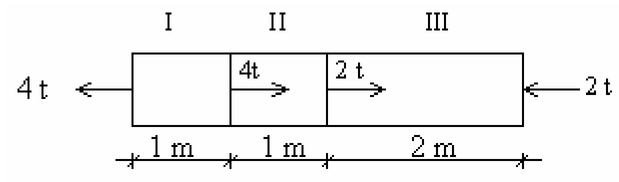
Bir barajın dip savağında boru çapı 120 cm dir. Barajda su yüksekliği 80 m. olduğuna göre borudaki iç basınç P= 8 kg/cm^2 olduğuna göre kullanılacak boru et kalınlığı ne kadar olmalıdır?

Boruda

$$\sigma=\frac{R.P}{t}\leq\sigma_{em}$$ 80 m su derinliğinde basınç P= 8 kg/cm^2 olduğuna göre

$$\frac{8.60}{t}\leq 1000 \qquad t\geq\frac{8.60}{1000}=0.48\,cm$$ t = 4.8 mm

Uygulama

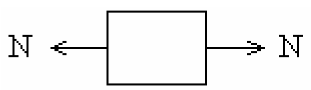


Şekildeki çubuktaki normal kuvvet dağılımını çiz ve en büyük gerilmeyi bulunuz. Toplam boy değişimini bulunuz?

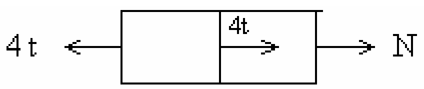
$F = 10\ cm^2$

$E = 2.10^6\ kg/cm^2$

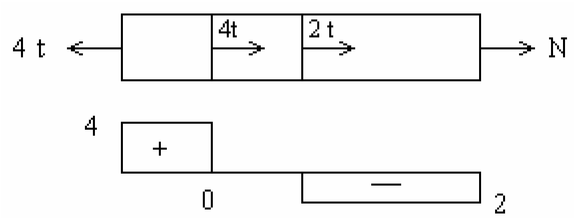
$-4 + N = 0 \rightarrow N_1 = 4$



$-4 + 4 + N = 0 \rightarrow N_2 = 0$



$-4 + 4 + 2 + N = 0 \rightarrow N_3 = -2$



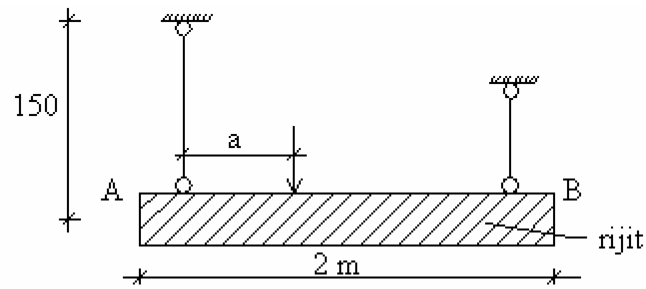
$\Delta L = \Delta L_1 + \Delta L_2 + \Delta L_3$

$$\Delta L = \frac{N_1 L_1}{EF} + \frac{N_2 + L_2}{EF} + \frac{N_3 + L_3}{EF}$$

$$\Delta L = \frac{4000.100}{10.2.10^6} + 0 + \frac{-200.2000}{10.2.10^6}$$

$$\sigma = \frac{N}{F} = \frac{4000}{10} = 400\, kg / cm^2$$

Problem 2



AB rijit çubuğa 1 ve 2 nolu dairesel kesitli çubuklarla şekildeki gibi asılmıştır. 1 nolu çubuk çelik olup çapı 20 mm'dir. 2 numaralı çubuk bakır olup çapı 25 mm'dir. P yükü ne kadar uzama etkimelidir ki şekil değiştirmeden sonra

AB çubuğu yatay kalsın.

b) Çubuklardaki gerilmeyi bulunuz?

$d_{çelik}$ = 20 mm

$d_{bakır}$ = 25 mm

$(\sigma_{em})_{çelik} = 1400$ kg/cm^2

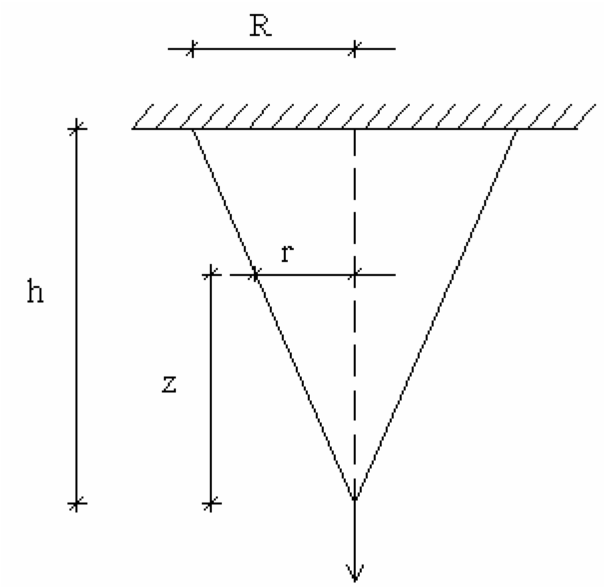
$(\sigma_{em})_{bakır} = 200$ kg/cm^2

$E_ç=2x10^6$ kg/cm^2

$E_b=1x10^6$ kg/cm^2

1 ve 2 numaralı çubukların kesitlerinin yeterli olup olmadığını kontrol ediniz. (P= 3 ton)

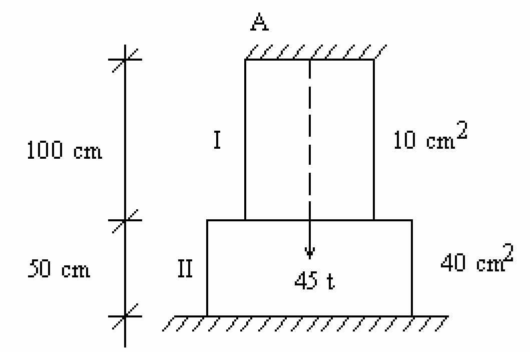
Problem 3



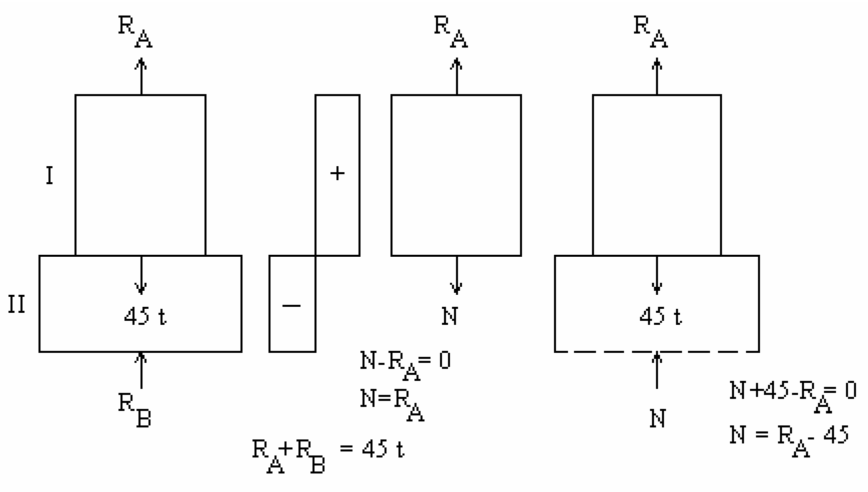
Şekildeki koninin özgül ağırlığı γ, elastisite modülü E'dir. Kendi ağırlığı etkisiyle uzama miktarını bulunuz?

Bilgi: $\Delta L = \int_0^h \frac{N}{EF} . d_2$

Problem 4



Kesit alanları 10 ve 40 cm^2 olan 2 çubuk ankastre olarak mesnetlenmiştir. Her iki parçadaki gerilmeleri bulunuz?



$R_A+R_B=45t$

$N- R_A=0$

$N= R_A$

$N+45- R_A=0$

$N= R_B-45$

1 ve 2. bölgedeki boy değişimlerini yazıp sıfıra eşitlemeliyiz. (Çünkü ankastre çubuk uzamaz.)

$\Delta L=0$ $$\Delta L = \frac{N_1 L_1}{EF} + \frac{N_2 + L_2}{EF}$$

$$\Delta L = \frac{R_A.100}{E.10} + \frac{-R_B + 50}{E.40} = 0$$

$40\ R_A - 5\ R_B = 0$

$8\ R_A - R_B = 0$

$R_A + R_B = 45$

$9\ R_A = 45 \rightarrow \quad R_A = 5^t$

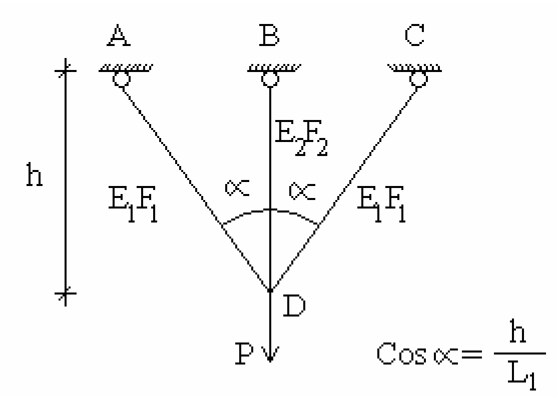
$$\sigma = \frac{N}{F} \qquad \sigma = \frac{5000}{10} = 500 kg/cm^2$$

$$\sigma = \frac{-40000}{40} = -1000 kg/cm^2$$

Normal Kuvvet Altında Hiperstatik Problemler

Hiperstatik problemler yalnız denge denklemleriyle çözülemeyen denklemlerdir. Bu tür problemlerde denge denklemleri yine geçerlidir. İlave denklemler ise şekil değiştirmelerin geometrik denklemlerden elde edilir. Şekil değiştirmelerin küçük olduğu yine yapılan kabuller arasındadır.

Örnek:



Üç çubuk şekildeki gibi bir D noktasında birleşip simetrik bir sistem meydana getirmiştir. Çubuk rijitlikleri verilmiştir. P yükünden doğan çubuk kuvvetlerini hesaplayınız?

$\Sigma F_y = 0$

$2 S_1 \, Cos\, \alpha + S_2 - P = 0$ (1)

$$\delta_1 = \frac{S_1.h}{E_1F_1.Cos\,\alpha}$$

$$\delta_2 = \frac{S_2.h}{E_2F_2.}$$

$$Cos\,\alpha = \frac{\delta_1}{\delta_2}$$

$$\frac{S_1.h}{E_1F_1.Cos\,\alpha} = \frac{S_2.h}{E_2F_2.} Cos\,\alpha \qquad (2)$$

(1) ve (2) den

$S_2 = P - 2S_1 \, Cos\, \alpha$

$$\frac{S_1.h}{E_1F_1.Cos\,\alpha} = \frac{(P - 2S_1\, Cos\,\alpha).h}{E_2F_2.} Cos\,\alpha$$

$S_1 .h\, E_2\, F_2 = (P - 2S_1 \, Cos\, \alpha)\, h\, Cos^2\, \alpha\, E_1F_1$

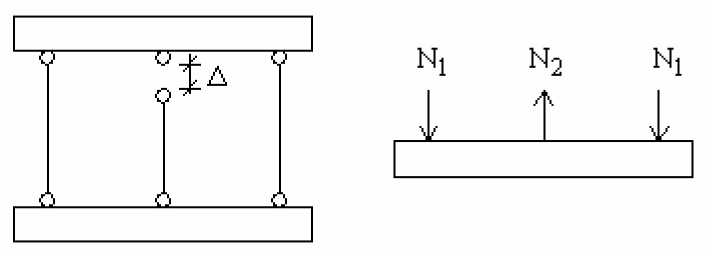
$S_1 .h\, E_2\, F_2 + 2\, h\, S_1\, E_1\, F_1\, Cos^3\, \alpha = P\, h\, Cos^2\, \alpha\, E_1\, F_1$

$S_1 (E_2\, F_2 + 2\, E_1\, F_1\, Cos^3\, \alpha) = P\, Cos^2\, \alpha\, E_1\, F_1$

$$S_1\,\left(\frac{E_2F_2}{E_1F_1}+2\,Cos^3\alpha\right)=P\,Cos^2\,\alpha$$

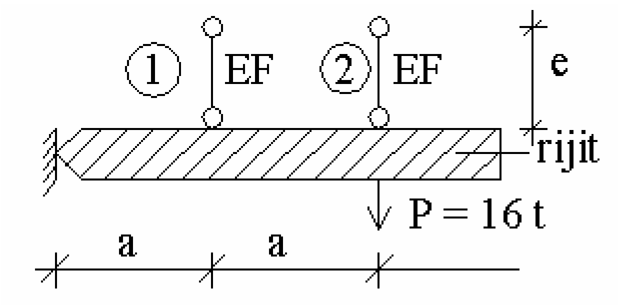
$$S_2=\frac{P}{2\,\dfrac{E_1F_1}{E_2F_2}\,(Cos^2\,\alpha+1)} \qquad S_1=\frac{P\,Cos^2\alpha}{2\,Cos^3\alpha+\dfrac{E_2F_2}{E_1F_1}}$$

Problem 6



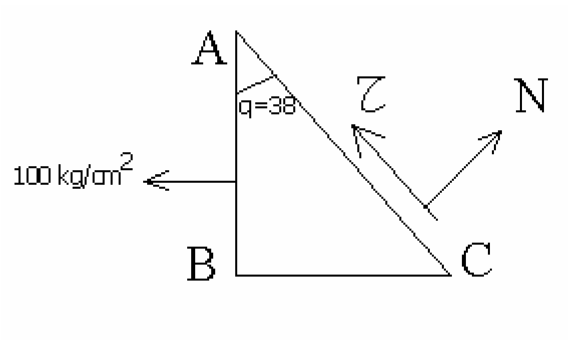
2 rijit levhanın arasında 3 adet aynı boyda çubuk atelyeye ısmarlanmıştır. Ancak çubuklar yerine takılırken ortadakinin Δ kadar kısa olduğu ortaya çıkmıştır. Buna rağmen çubuk çekilerek yerine takılmıştır. Çubuklarda meydana gelen kuvvetleri hesapla?

Problem 7



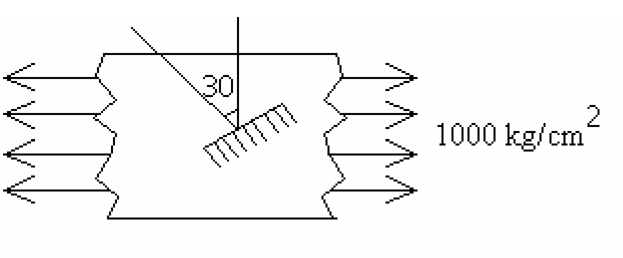
Şekildeki rijit çubuk 1 ve 2 nolu çelik çubuklarla asılmıştır. σ_{em}= 1600 kg/cm^2 olduğuna göre çubuk kesitlerini tayin ediniz?

Örnek:



AC yüzeyindeki σ normal kuvvet, τ kayma gerilmesini bulunuz? Gerilme durumunu Mohr dairesinde çiziniz?

Örnek:



Şekildeki cismin eğik yüzeyindeki gerilerli bulunuz ve Mohr dairesinde çiziniz?

SICAKLIK GERİLMELERİ

Bir sistemin t = 0 sıcaklığında bulunduğu bir ortamda t sıcaklığına değişen bir sıcaklık değişmesi durumunda meydana gelen şekil değiştirme

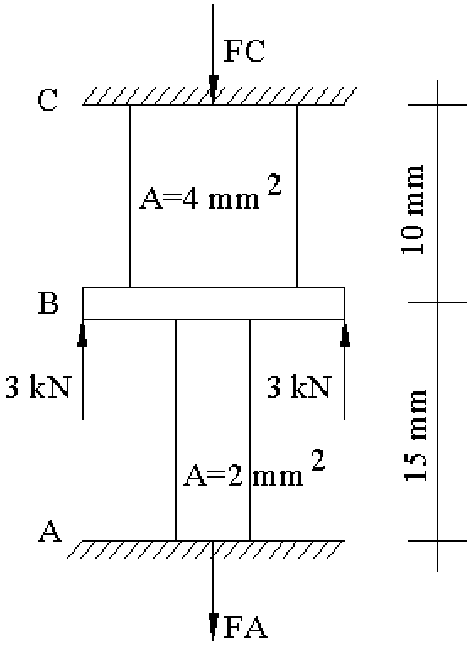
$$\varepsilon_T = \alpha(T - T_0) = \frac{\sigma}{E}$$

$$\Delta L_T = \alpha(T - T_0).L$$

α = Sıcaklık genleşme katsayısı

$$\sigma = E.\alpha(T - T_0)$$

ÖRNEK:



$E_{AB} = 10x10^6$ N/mm^2
$E_{BC} = 16x10^6$ N/mm^2
Şekildeki 2 çubuk rijit bir plak ile 2 mesnete rijit bir şekilde bağlanmıştır. Her bir çubuktaki gerilmeleri bulunuz?

Çözüm:

$$+\uparrow \sum Fy = 0 \qquad -FC - FA + 6 = 0$$

$$FC + FA = 6kN$$

FC+FA=6
4,8.FC+FA=6
FA=1034 N
FC=4966 N

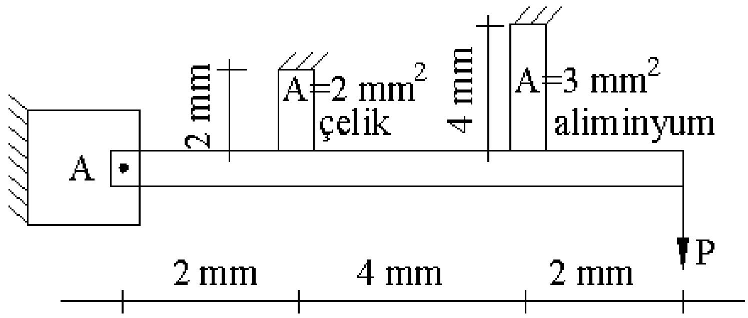
$$(\Delta L)^{AB}_{uzama} = (\Delta L)^{BC}_{kısalm}$$

$$\frac{F_{AB}.15}{10\times10^6\times2} = \frac{F_{BC}.10}{16\times10^6\times4}$$

FC=4,8.FA

$$\sigma_A = \frac{1034}{2} = 517 N/mm^2 \qquad \sigma_C = \frac{4966}{4} = 1242 N/mm^2$$

ÖRNEK:



$\sigma_{çelik}^{emn} = 160 N/mm^2$

$\sigma_{al}^{emn} = 180 N/mm^2$

$E_{al} = 10.10^6$ N/mm^2

$E_ç = 28.10^6$ N/mm^2

Emniyetle taşınacak P yükünü bulunuz?

ÇÖZÜM:

$$\frac{\Delta a}{6} = \frac{\Delta ç}{2} \Rightarrow \Delta a = 3\Delta ç$$

$$\frac{\sigma a.4}{10.10^6} = 3\frac{\sigma ç.2}{28.10^6}$$

$\sigma_ç$ =18670. σ_a

$\sigma_ç$ = 18670.160

$\sigma_ç$ = 298 N/mm^2>180 bu çözüm uygun değil

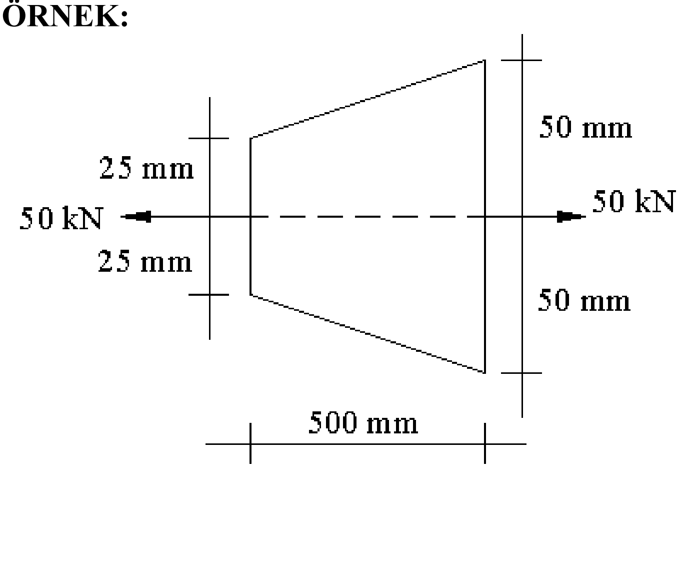
180 = 18670. σ_a

σ_a = 96 N/mm^2<160 uygundur.

+ΣM_a =0 180.2x2+96.3x6-P.8 = 0

P = 306 N

ÖRNEK:

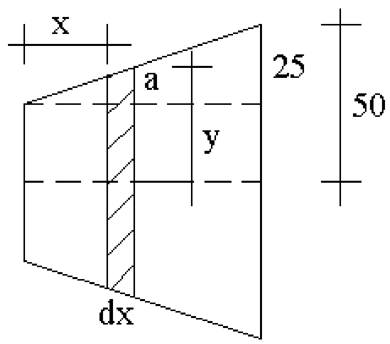


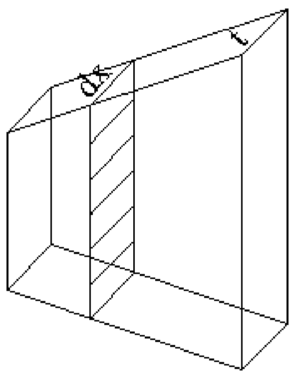
t = 10 mm levhanın kalınlığı

E = 2x10^5

Levhanın toplam uzamasını bulunuz?

Çözüm:





$$\frac{25}{500} = \frac{a}{x} \Rightarrow a = \frac{x}{20}$$

$$\delta = \frac{P.dx}{E.dA} \qquad \int \delta \int_0^{500} \frac{P.dx}{E.(500+x)}$$

dA = 2yt

$$20.\left(25 + \frac{x}{20}\right)$$

$$\Delta L = \frac{\delta}{E} \int \frac{dx}{(500+x)}$$

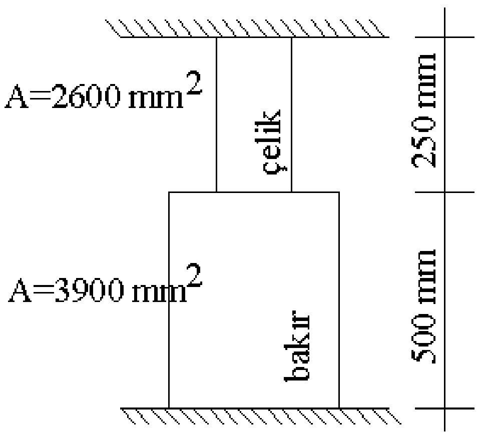
$$\Delta L = \frac{P}{E} \ln(500+x) \Big|_0^{500}$$

dA = 500 + x

$$= \frac{50.10^3}{2.10^5} [(500+500)] = 17{,}3mm$$

ΔL = 17,3 mm.

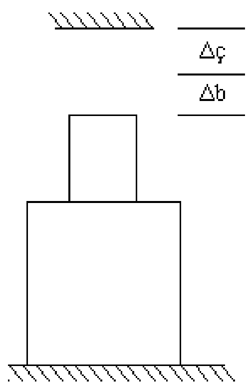
ÖRNEK:



Şekildeki kompozit çubuğun sıcaklığı 39°C ye düşürüldüğünde elemanlardaki gerilmeleri bulunuz?

$E_ç = 206.8x10^6$
$E_b = 103.4x10^6$
$\alpha_ç = 11.7x10^{-6}$
$\alpha_b = 17.64.10^{-6}$

Çözüm:



$\Delta_T = \Delta_ç + \Delta_b$

$$\Delta_T = [\alpha.L.(T - T_0)]_ç + [\alpha.L.(T - T_0)]_b$$

$\Delta_T = 11{,}7.10^{-6}.0{,}25.39+17{,}64.10^{-6}.0{,}5.39$

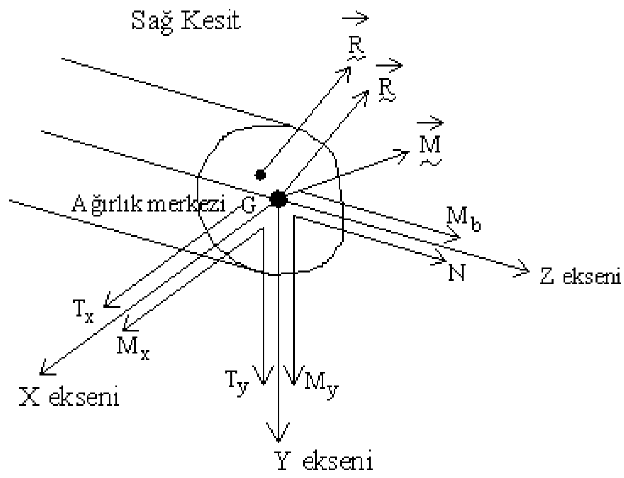
$\Delta_T = 4{,}58.10^{-6}$ m.

$$\Delta_T = \frac{P_Ç.250}{206.8.10^6.2600} + \frac{P_b.500}{103.4.10^6.3900}$$

$$4{,}58.10^{-6} = \frac{P.250}{206.8.10^6.2600} + \frac{P.500}{103.4.10^6.3900}$$

$$\sigma_ç = \frac{2700}{2600} = 1{,}3 \qquad \sigma_b = \frac{2700}{3900} = 0{,}7$$

İÇ KUVVETLER VE KESİT TESİRLERİNİN HESABI



İç kuvvetlerle ilgili olarak kesit tesirlerinin hesabında R bütün dış tesirleri dengeleyen herhangi bir yerdeki kuvvet'i temsil ettiğini düşünelim. (Hatta R'yi ağırlık merkezine taşımak daha faydalı olur.) R'nin eksenlere düşen bileşenlerini kullandığımızda;

R = Bütün dış kuvvetleri dengeleyen herhangi bir yerdeki kuvvet

M_b =Momentin (M) z ekseni üzerindeki bileşeni

N = (Normal kuvvet) → P

T_x, T_y = Kesme Kuvveti (x ve y'nin bileşenleri) → V_x, V_y

M_b = Burulma momenti → T

M_x, M_y = Eğilme momenti (Momentin x ve y bileşenleri)→ M_x, M_y

Kesit Tesirlerinin Hesabı

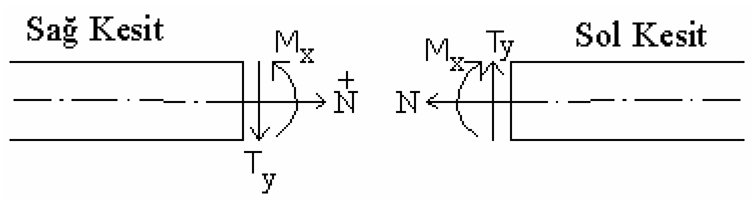
a) Dış yükler ve çubuk aynı bir düzlemin içindeyse

b) Kısıtlama yok yani düzlemin dışında da olabilir.

a) Dış yükler ve çubuk aynı bir düzlemin içindeyse = Düzlemsel hal:

Bütün kuvvetler (yz) düzleminin içinde olsun

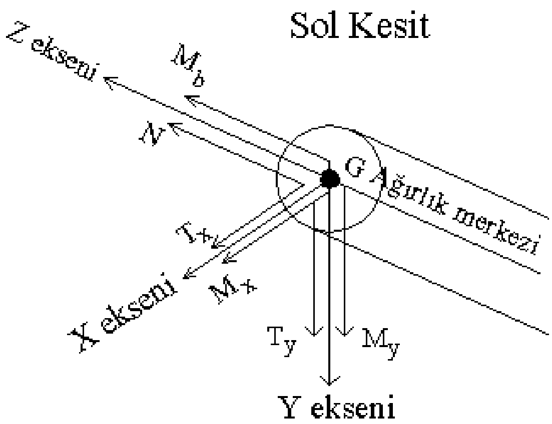
N, T_y, M_x



İşaretlerin İncelenmesi

Seçilen eksen takımına göre sağ kesitte iç kuvvetler eksenlerin yönünde ise (+) ters yönünde ise (-) alınacaktır.

Sol kesitte ise eksenlerin ters yönünde olan iç kuvvetleri (+) aynı yönde olan iç kuvvetleri (-) almak gerekir.



Kesit tesirlerin hesabında iki hal söz konusudur.

a) Dış yükler ve çubuk aynı bir düzlemin içindeyse (Düzlemsel hal)

b) Kısıtlama yok, yani dış yükler ve çubuk belirli bir düzlemin dışında da olabilir. (Uzaysal hal)

Kesit Tesirlerinin hesabı için izlenecek yollar:

1. Kesim Yöntemi

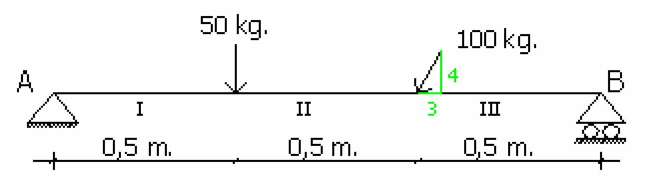
a) Verilen sistemin bağ kuvvetleri hesaplanır

b) Yükün değişmesine göre çubukta bölgeler ayrılır. Her bir bölgede bir kesim yapılır. Çubuğun göz önüne alınan parçası üzerine kesit tesirleri (+) işaretle yerleştirilir.

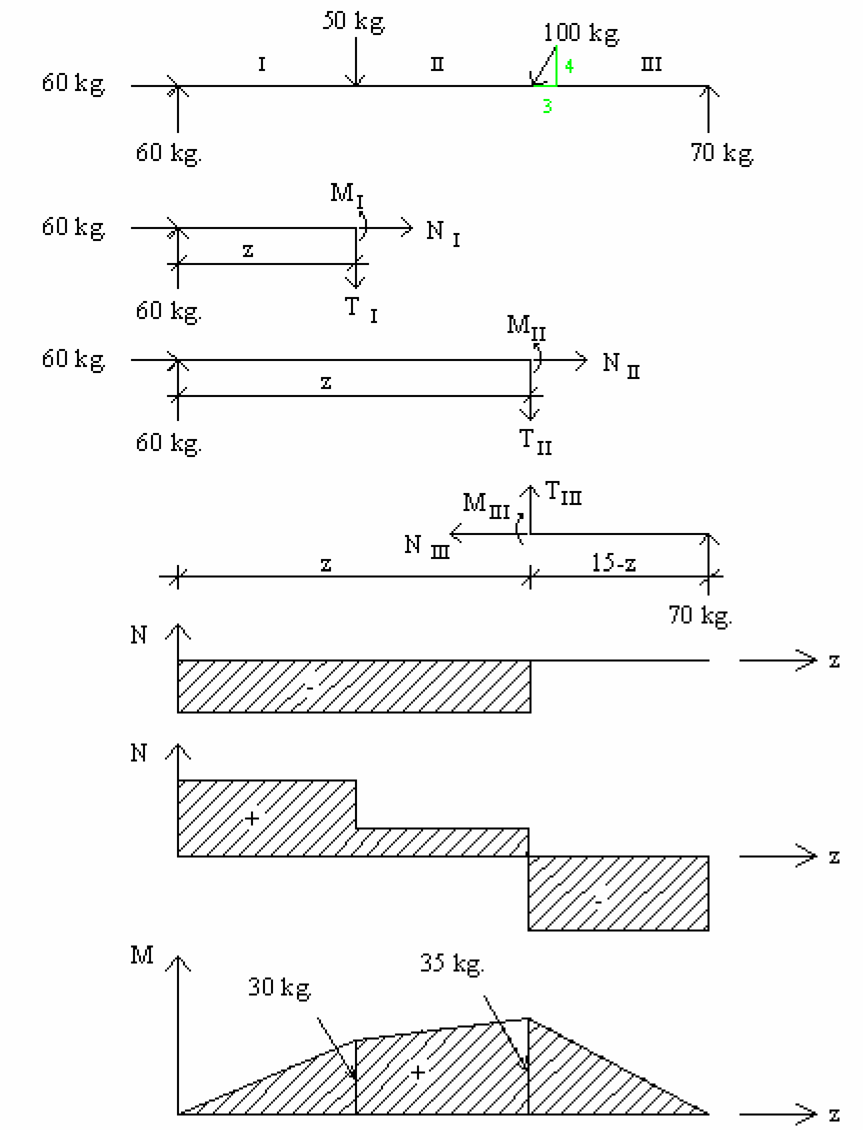
c) Her bir parçada denge denklemleri yazılarak kesit tesirlerinin değerleri (z) koordinatının fonksiyonu olarak bulunur.

d) Kesit tesirlerinde (z) koordinatına değerler vererek kesit tesirleri bir diyagram üzerinde işaretlenir.

Örnek:



Şekildeki AB çubuğunda normal kuvvet, kesme kuvveti ve eğilme momenti diyagramını çiziniz?



Denge denklemleri kullanılarak çubuğun bağ kuvveleri:

$A_x = 60$ kg

$A_y = 60$ kg

$B_y = 70$ kg olarak bulunur.

Çubukta üç bölge vardır. I. Bölgede sol paçanın denge denkleminden;

$N_1 + 60 = 0$

$-T_1 + 60 = 0$

$M_1 – 60\ z = 0$'dır.

Denklemler çözülürse

$N_1 = -\ 60$ kg

$T_1 = 60$ kg

$M_1 = 60.z$ kgm bulunur.

Bu değerlerin z ile değişimini gösteren diyagramlar altta çizilmiştir. II. Bölge için iç kuvvetler;

$N_{11} + 60 = 0$

$-T_{11} + 60 - 50 = 0$

$M_{11} – 60\ z + 50\ (z – 0.50) = 0$’dır. Buradan

$N_{11} = - 60$ kg

$T_{11} = 10$ kg

$M_{11} = 10\ z + 25$ kgm bulunur.

$z = 0.50$ m için

$M_{11} = 30$ kgm

$z = 1$ m için

$M_{11} = 35$ kgm bulunur. III. Bölge için bu bölgeye ait iç kuvvetler;

$- N_{111} = 0$

$T_{111} + 70 = 0$

$- M_{111} + 70\ (1.50 – z) = 0$ denklemler çözülerek;

$N_{111} = 0$

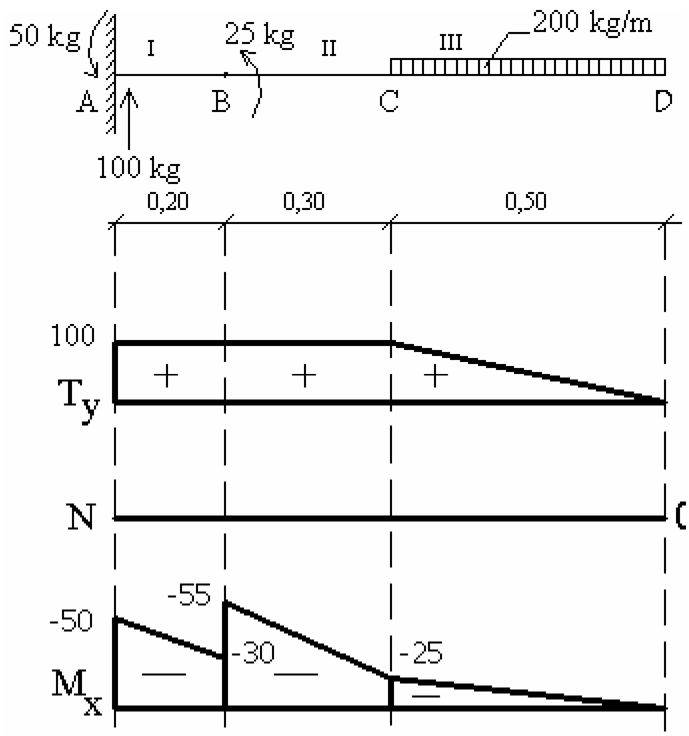
$T_{111} = - 70$ kg

$M_{111} = -70\ z + 105$ kgm elde edilir.

$z = 1.50$ m için

$M_{111} = 0$ elde edilir.

Örnek



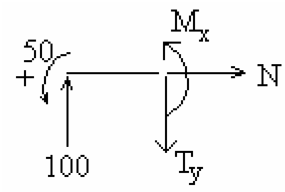
Şekildeki konsol kirişin

Eğilme momenti,

Kesme kuvveti,

Normal kuvvet

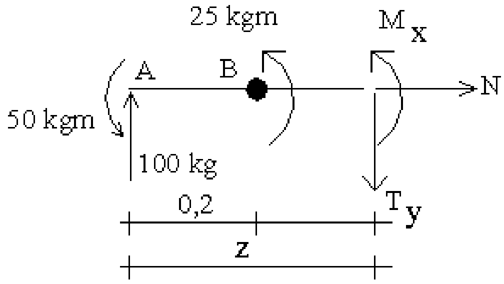
Diyagramlarını çiziniz?



$\Sigma F_x = 0 \quad N = 0$ $\Sigma M_x = 0$

$\Sigma F_x = 100 - T_y$ $50 - 100.z + M_x = 0$ ($z = 0.20$ için)

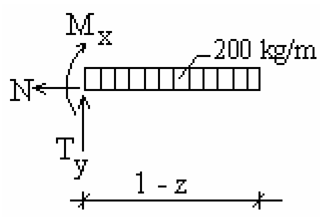
$T_y = 100$ kg $M_x = -30$ kgm



$T_y = 100$ kg

$M_x + 25 + 50 - 100.z = 0$ ($z = 0.50$ için)

$M_x = -25$ kgm



Sağ parçayı aldığımız için sol kesit göze alınır.

$N = 0, \quad S = 200.(1-z)$

$T_y - 200.(1-z)$

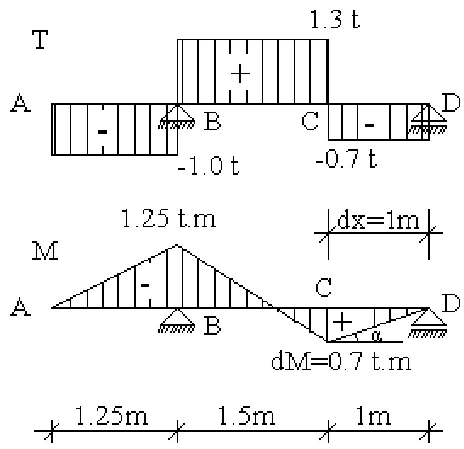
$T_y = 200.(1-z)$ $z = 0.50$ ise $T_y = 100$ kg'dır.

$M_x + 200.(1-z).\left(\frac{1-z}{z}\right) = 0$

$M_x = -100.(1-z)^2$

$M_x = 25$ kgm

Örnek: Şekilde verilen moment ve kesme kuvveti diyagramından yararlanarak kesme kuvveti ile moment arasındaki bağıntıyı gösteriniz?



C Kesitinde

$M_C = 0.7$ tm

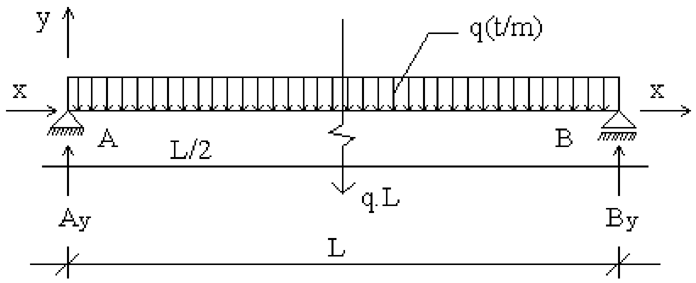
$$\frac{dM}{dx} = T = Tg\,\alpha$$

dx = 1.0 m

dM = 0.7 tm

$$\frac{0.7}{1.0} = 0.7\,t = T_5$$

BASİT KİRİŞTE YAYILI YÜKTEN OLUŞAN KESİT TESİRLERİ



a) Mesnet Reaksiyonları

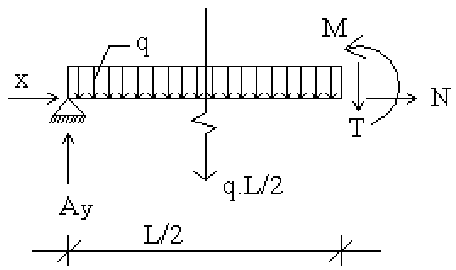
$\sum x = 0, \qquad A_x = 0$

$\uparrow \sum y = 0, \qquad + A_y - q.l + B_y = 0$

$\sum M_A = 0, \qquad q.l(l/2) - l.B_y = 0$

$B_y = \dfrac{q.l}{2}, \qquad A_y = \dfrac{q.l}{2}$

b) Kesit Tesirleri (M, N, T)



$L/2$ 'de M.N.T. değerinin bulunması

$\Sigma x = 0\ , \quad N = 0$

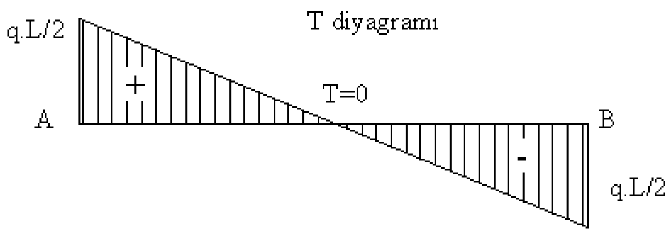
$\uparrow \sum y = 0$,

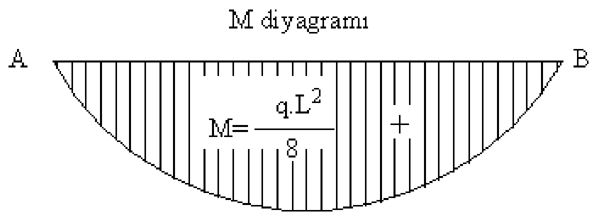
$\sum M_{\frac{L}{2}} = 0$, $\quad A_y.\dfrac{1}{2} - \dfrac{q.l}{2}.\left(\dfrac{1}{4}\right) - M = 0$

$$M = +\frac{q\,l^2}{4}.\frac{l}{2} = \frac{q.l^2}{8}$$

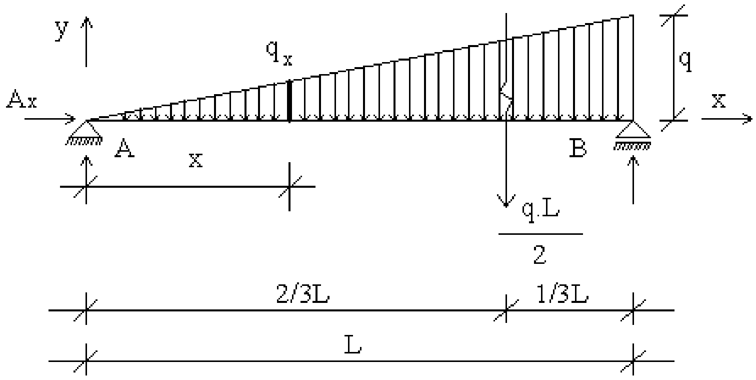
$$M = +\frac{q\,l^2}{4} - \frac{q.l^2}{8}$$

$$M = \frac{q.l^2}{8}$$





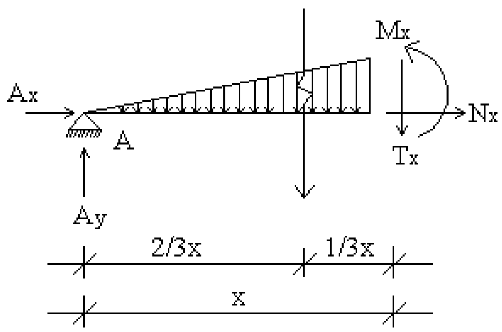
ÜÇGEN YÜKLEME ALTINDA BASİT KİRİŞTE KESİT TESİRLERİ



a) Mesnet Reaksiyonları

$$\sum x = 0, \qquad A_x = 0$$

$$\uparrow \sum y = 0, \qquad A_y - \frac{q.l}{2} + B_y = 0$$



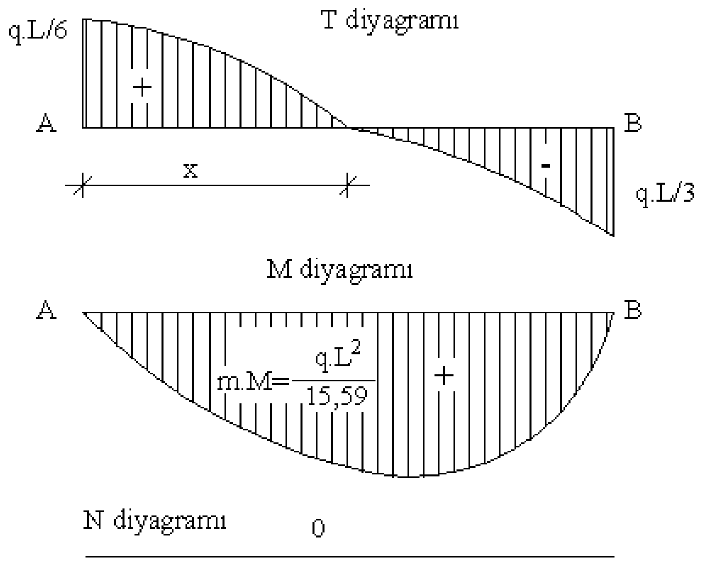
$$\sum M_A = 0, \qquad \frac{q.l}{2}.\left(\frac{2}{3}.l\right).B_y.l = 0$$

$$B_y = \frac{q.l}{3},$$

$$\sum M_B = 0, \qquad A_y.l - \frac{q.l.}{2}.\left(\frac{1}{3}.l\right). = 0$$

$$A_y = \frac{q.l}{6}$$

b) Kesit Tesirleri (M, N, T)



$$\sum x = 0, \qquad N_x = 0$$

$$\uparrow \sum y = 0, \qquad A_y - q.l/(x) - T_x = 0$$

$$T_x = q.l/6 - \frac{q}{l}.\frac{x^2}{2} = 0$$

$$\sum M_x = 0 \quad A_y.(x) - \frac{q}{l}(x).(x).\frac{1}{2}.\frac{1}{3}.x - M_x = 0$$

$$M = +\frac{q\,l}{6}.(x) - \frac{q.x^3}{6l}$$

c) Max. Momentin Bulunması

$T_x = \frac{q.l}{6} - \frac{q.x}{l}.\frac{x}{2} = \frac{q}{2}\left(\frac{l}{3} - \frac{x^2}{l}\right)$

Kesme kuvvetinin sıfır olduğu yerde moment max. değere ulaşacağından T_x ifadesinde parantez içindeki değerde $\frac{x^2}{l} = \frac{l}{3}$ olursa T_x sıfırdır. Burdan x çekilirse

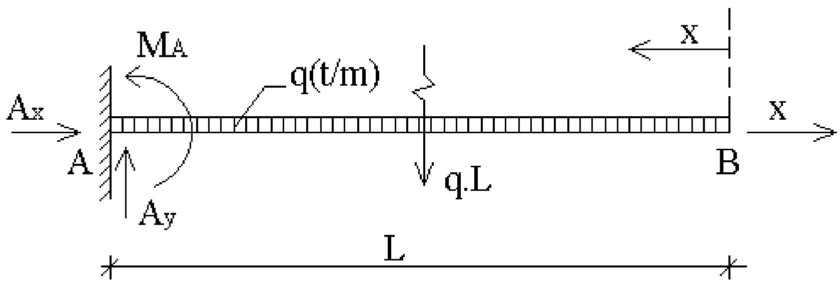
$x^2 = \frac{l^2}{3} \rightarrow x = \frac{l}{\sqrt{3}} = 0.577\,l = x_1$

bulunur.

$M_{max} = \frac{q.l}{6}.\frac{l}{\sqrt{3}} - \frac{q}{l}.\frac{l}{\sqrt{3}}.\frac{l}{2.\sqrt{3}}.\frac{l}{3.\sqrt{3}}. = \frac{q.l^2}{6\sqrt{3}} - \frac{q.l^2}{18\sqrt{3}}$

$M_{max} = \frac{q.l^2}{9\sqrt{3}} = \frac{q.l^2}{15,6} = 0.0649\,l^2$

KONSOL KİRİŞTE YAYILI YÜKTEN OLUŞAN KESİT TESİRLERİ



a) Mesnet reaksiyonları

$\underset{+}{\longrightarrow}\sum x = 0$, $A_x = 0$

$+\uparrow \sum y = 0$, $+A_y - q.L = 0$, $A_y = q.L$

$+\sum M_A = 0$, $q.L(\frac{L}{2}) - M_A = 0$

$M_A = \frac{q.L^2}{2}$

b) Kesit Tesirleri

$\underset{+}{\longrightarrow}\sum x = 0$, $N_x = 0$

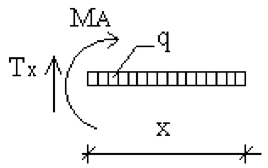
$+\uparrow \sum y = 0$, $+T_x - q.x = 0$, $T_x = q.x$

$+\sum M_A = 0$, $\quad q.x(\frac{x}{2}) + Mx = 0$

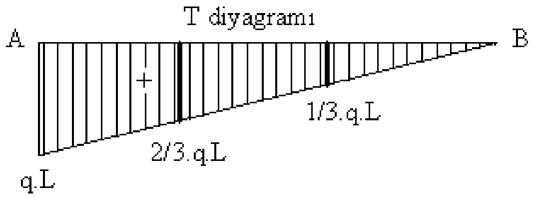
$$M_x = -\frac{q.x^2}{2}$$

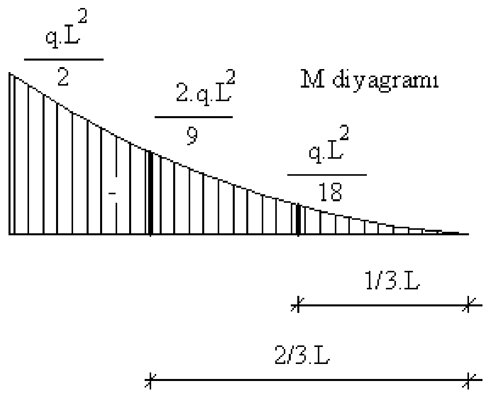
$x = \frac{L}{3}$ için $\quad T = \frac{q.L}{3}$, $\quad M = \frac{q.L^2}{18}$

$x = \frac{2}{3}L$ için $\quad T = q.L.(\frac{2}{3})$, $\quad M = \frac{2}{9}q.L^2$

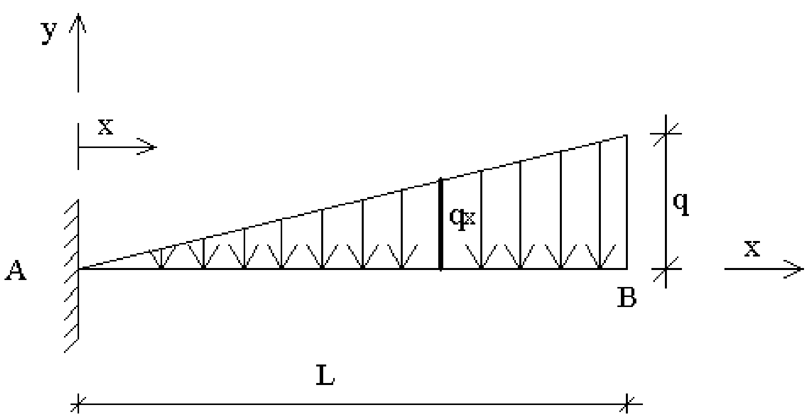


M, N, T Diyagramı





ÜÇGEN YÜK ALTINDA KONSOL KİRİŞTE OLUŞAN KESİT TESİRLERİ



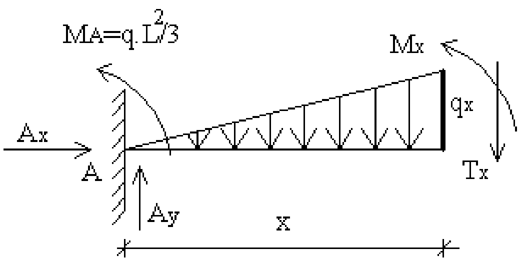
a) Mesnet reaksiyonları

$\underset{\xrightarrow{+}}{\sum x = 0}$, $\quad A_x = 0$

$+\uparrow \sum y = 0$,

$+A_y - \frac{qL}{2} = 0$,

$$A_y = \frac{q.L}{2}$$



$$+\sum M_A = 0 \,, \qquad \frac{q.L}{2} \times \frac{2}{3} L - M_A = 0$$

$$M_A = \frac{q.L^2}{3}$$

b) Kesit Tesirleri

$$\sum_{\xrightarrow{+}} x = 0 \,, \qquad N_x = 0$$

$$+\uparrow \sum y = 0 \,, \qquad A_y = \frac{qx(x)}{2} - T_x = 0$$

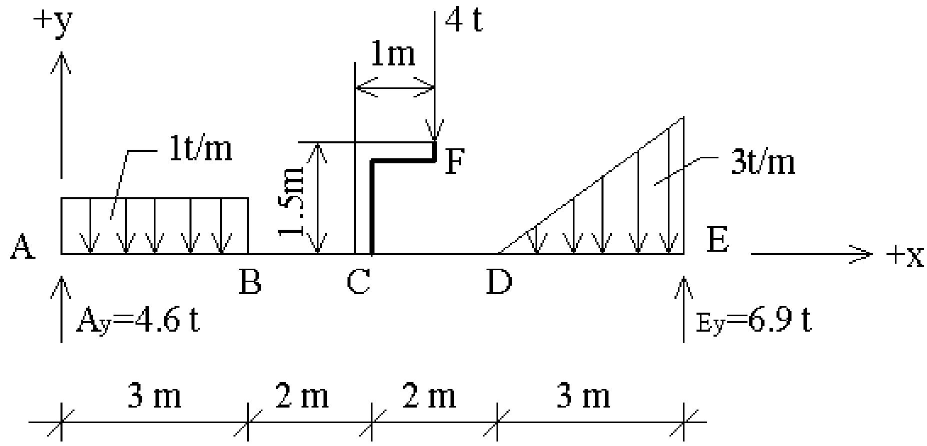
$$T_x = \frac{q.L^2}{2} - \frac{q}{L}(x)(x)\frac{1}{2} \qquad T_x = \frac{q.L}{2} - \frac{qx}{2L}$$

$$+\sum M = 0 \,, \qquad -\frac{q.L^2}{3} + A_y.x - \frac{qx(x)}{2}(\frac{1}{3}.x) - M_x = 0$$

$$M_x = -\frac{q.L^2}{3} + \frac{q.L}{2}(x) - \frac{q.x^3}{6L}$$

ÖRNEK

Şekildeki yükleme durumu verilen kirişin M, N, T diyagramlarını çiziniz?



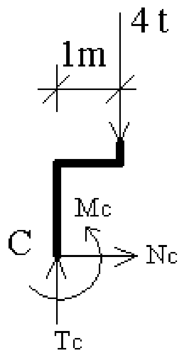
a) Mesnet reaksiyonlarının bulunması

$$\sum_{\xrightarrow{+}} x = 0 \,, \qquad A_x = 0$$

$+\uparrow\sum y = 0$, $+A_y - 3 - 4 - 4{,}5 + E_y = 0$, $A_y = 4.6$ ton

$+\sum M_A = 0$ $3 \, . \, 1{,}5 + 4 \, . \, 6 + 4{,}5 \, . \, 9 - 10E_y$, $E_y = \dfrac{69}{10} = 6.9 ton$

b) Kesit Tesirleri (M, N, T)

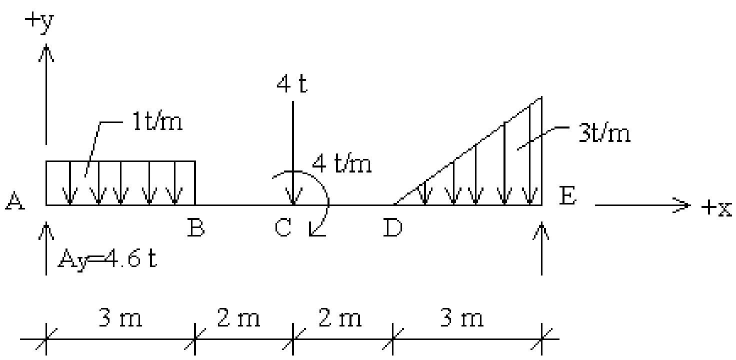


$+\underset{\rightarrow}{\sum} x = 0$, $N_c = 0$

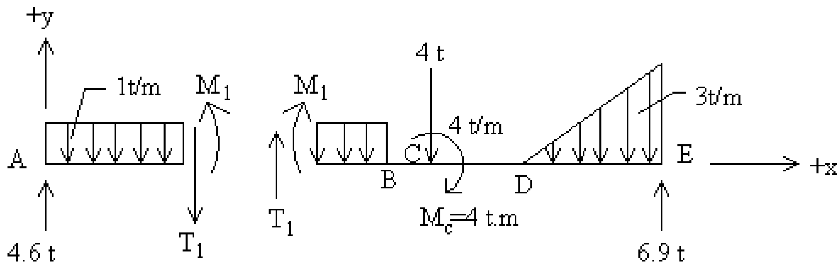
$+\uparrow\sum y = 0$, $-4 + T_c = 0$ $T_c = 4$ ton

$+\sum M_A = 0$, $+4.1 - M_c = 0$ $M_c = 4$ t.m

Bu değerleri kiriş üzerinde işaretlersek,



A B arasında kesit tesirleri



$+\underset{\rightarrow}{\sum} x = 0$, $N_1 = 0$

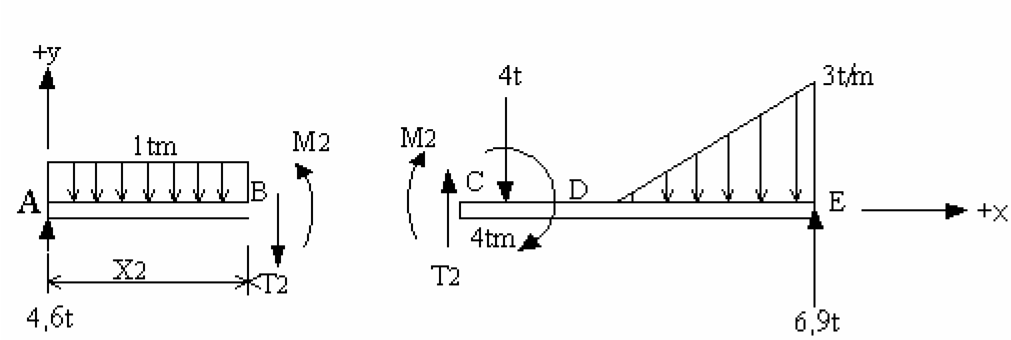
$+\uparrow\sum y = 0$, $4{,}6 - 1.X_1 + T_1 = 0$ $T_1 = -1.X_1 + 4{,}6$ $0< X_1<3$ m

$+\sum M_A = 0$, $4{,}6 \, . \, X_1 - X_1 \, . \, 1(\dfrac{X_1}{2}) - M_1 = 0$ $-M_1 = \dfrac{X_1^2}{2} - 4{,}6.X_1$ $0< X_1<3$ m

$$M_1 = -\frac{X_1^2}{2} + 4,6X_1$$

Burada X_1're değerler vermek suretiyle 0 ile 3 metre arasındaki T_1 ve M_1 kesit tesirleri bulunur.

B C arasındaki kesit tesirleri



$\overset{+}{\rightarrow}\sum x = 0$, $N_2 = 0$

$+\uparrow\sum y = 0$, $4,6 - 3 - T_2 = 0$ $T_2 = +1,6$ ton yönü değişecek $3<X_2<5$ m

$+\sum M_A = 0$, $4,6.X_2 - 3.(X_2 - 1,5) - M_2 = 0$

$-M_2 = 3.(X_2 - 1,5) - 4,6.X_2$

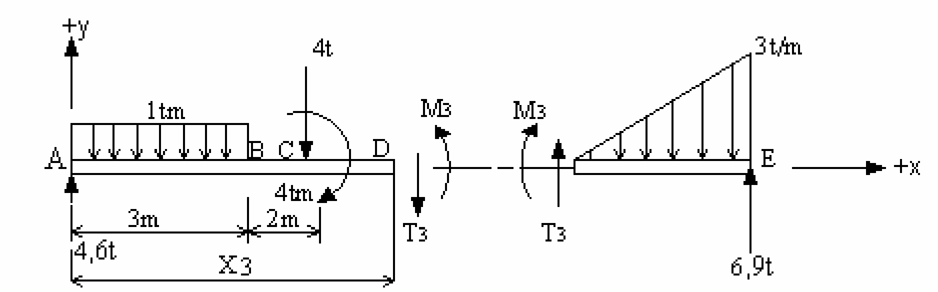
$-M_2 = 3.X_2 - 4,5 - 4,6.X_2$

$-M_2 = -1,6.X_2 - 4,5$ $3<X_2<5$

$M_2 = 1,6.X_2 + 4,5$

X_2'ye 3 m ile 5 m arasında değerler verilerek T_2 ve M_2 kesit tesirleri bulunur.

C D arasında kesit tesirleri



$\overset{+}{\rightarrow}\sum x = 0$, $N_3 = 0$

$+\uparrow\sum y = 0$, $4,6 - 3 + T_3 = 0$ $T_3 = -2,4$ ton $5<X_2<7$ m

$+\sum M_A = 0$, $4,6.X_3 - 3.(X_3 - 1,5) + 4 - 4(X_3 - 5) - M_3 = 0$

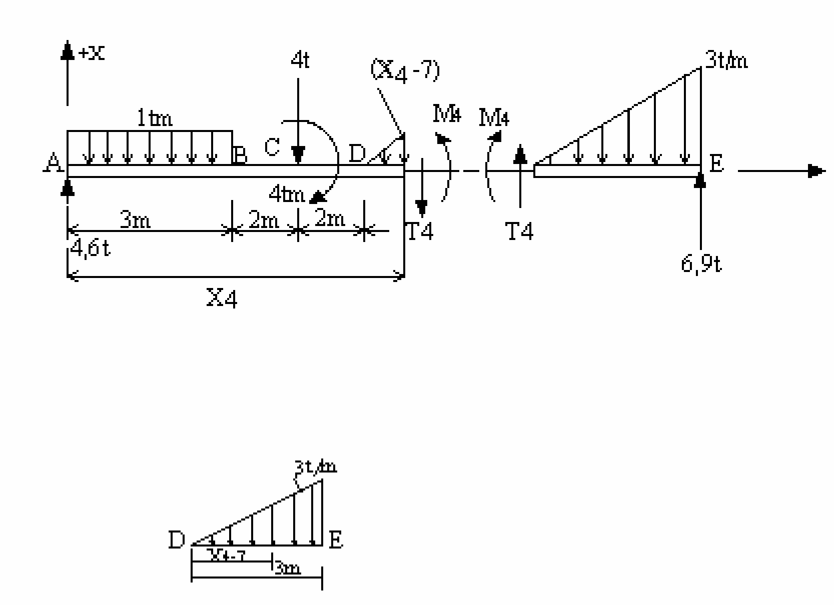
$4,6.X_3 - 3.X_3 + 4,5 + 4 - 4.X_3 + 20 - M_3 = 0$

$-2,4.X_3 + 28,5 - M_3 = 0$

$M_3 = 2,4.\ X_3 + 28,5$ $5< X_3<7$ m

X_3'e 5 m ile 7 m arasında değerler verilerek T_3 ve M_3 kesit tesirleri bulunur.

D E arasında kesit tesirleri.



$\underset{\rightarrow}{+\sum} x = 0$, $N_4 = 0$

$+\uparrow \sum y = 0$, $4{,}6 - 3 - 4 - \frac{1}{2}(X_4 - 2)^2 + T_4 = 0$

$$4{,}6 - 7 - \frac{1}{2}(X_4 - 7)^2 + T_4 = 0$$

$$T_4 = -2{,}4 - \frac{1}{2}(X_4 - 7)^2 \qquad 7 < X_4 < 10 \text{ m}$$

$$\frac{3}{3} = \frac{qx}{X_4 - 7}$$

$$qx = 1.(X_4 - 7)$$

$+\sum M = 0$, $4{,}6.X_4 - 3.(X_4 - 1{,}5) + 4 - 4.(X_4 - 5) - \left[\frac{1}{2}(X_4 - 7)^2 . \frac{1}{3}(X_4 - 7)\right] - M_4 = 0$

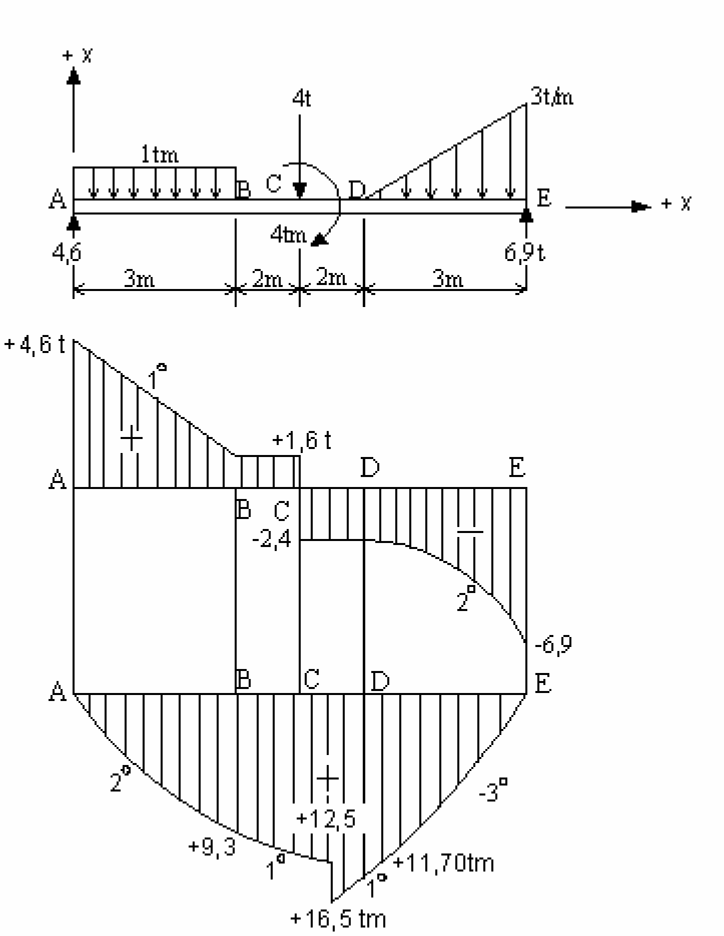
$$4{,}6.X_4 - 3.X_4 + 4{,}5 + 4 - 4.X_4 + 20 - \left[\frac{1}{6}(X_4 - 7)^3\right] - M_4 = 0$$

$$-2{,}4.X_4 + 28{,}5 - \frac{1}{6}(X_4 - 7)^3 - M_4 = 0$$

$$-M_4 = 2{,}4.X_4 + \frac{1}{6}(X_4 - 7)^3 - 28{,}5$$

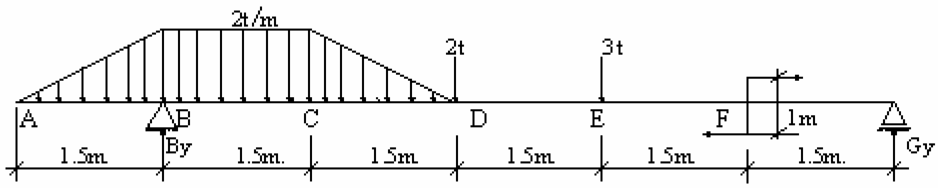
$$M_4 = -\frac{1}{6}(X_4 - 7)^3 - 2{,}4.X_4 + 28{,}5 \qquad 7<X_4<10 \text{ m}$$

X_4'de değerler vermek suretiyle T_4 ve M_4 kesit tesirleri bulunur.



ÖRNEK

Şekilde çıkmalı basit kirişin B, C, D, E ve F kesitlerindeki kesit tesirlerini bulunuz ve M, N, T diyagramlarını çiziniz?



Mesnet reaksiyonlarının bulunması

$$\underset{\rightarrow}{+}\sum x = 0, \qquad B_x = 0$$

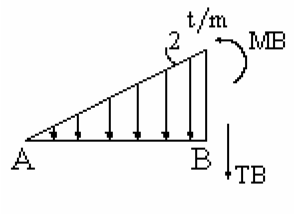
$$+\uparrow \sum y = 0, \qquad -(1{,}5.2)\frac{1}{2} + B_y - 1{,}5.2 - (1{,}5.2)\frac{1}{2} - 2 - 3 + G_y = 0$$

$+\sum M_B = 0$, $\quad -(1{,}5.2)\dfrac{1}{2}.0{,}5 + 1{,}5.2.0{,}75 + (1{,}5.2)\dfrac{1}{2}.2{,}0 + 2.3 + 3.4{,}5 + 2.1 - 7{,}5.G_y = 0$

-0,75+2,25+3,0+6+13,5+2-7,5.G_y = 0

$G_y = \dfrac{26}{7{,}5} = 3{,}46$ ton $\quad B_y = 11 - 3{,}46 = 7{,}54$ ton

96

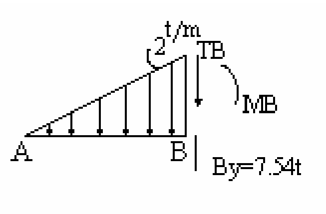


B'nin solunda:

$+\underset{\rightarrow}{\sum} x = 0$, $\quad N_B = 0$

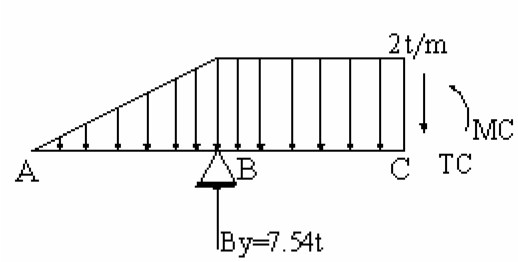
$+\uparrow \sum y = 0$, $\quad -(1{,}5.2)\dfrac{1}{2} - T_B = 0 \quad T_B = -1{,}5$ ton

$+\sum M_B = 0$, $\quad -1{,}5 \;.\; 0{,}5\; M_B = 0 \quad M_B = -0{,}75$ t.m



B'nin sağında:

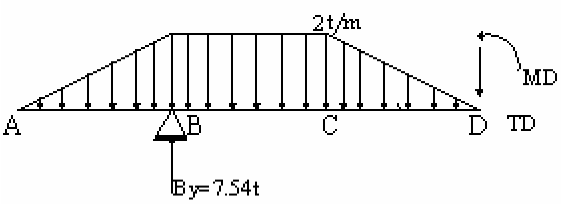
$+\uparrow \sum y = 0$, $\quad -1{,}5 + 7{,}54 - T_B = 0 \quad T_B = 6{,}04$ ton
$M_B = -0{,}75$ t.m



C noktasında:

$+\uparrow \sum y = 0$, $\quad -1{,}5 + 7{,}54 - 3 - T_C = 0$
$T_C = 3{,}04$ ton

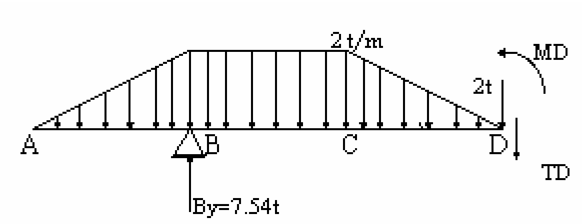
$+\sum M_C = 0$, $\quad -1{,}5.2 + 7{,}54.1{,}5 - 3.0{,}75 - M_C = 0$
$M_C = 6{,}06$ t.m



D'nin solunda:

$+\uparrow \sum y = 0$, $\quad -1{,}5 + 7{,}54 - 3 - 1{,}5 - T_D = 0$
$T_D = 1{,}54$ ton

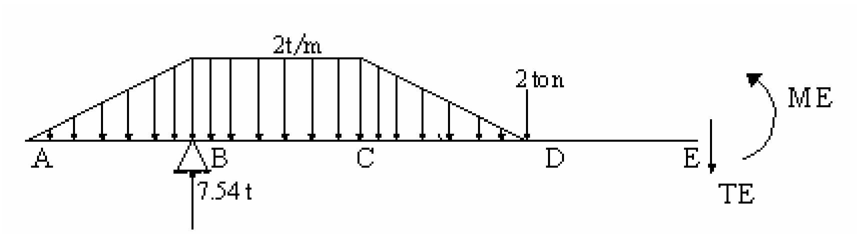
$+\sum M_D = 0$,
$-1{,}5.23{,}5 + 7{,}54.3 - 3.2{,}25 - 1{,}5.1.M_D = 0$
$M_D = 9{,}12$ t.m



D'nin sağında

$+\uparrow \sum D = 0$,
$-1{,}5 + 7{,}54 - 3 - 1{,}5 - 2 + T_D = 0$
$T_D = -0{,}45$ ton
$M_D = 9{,}2$ t.m

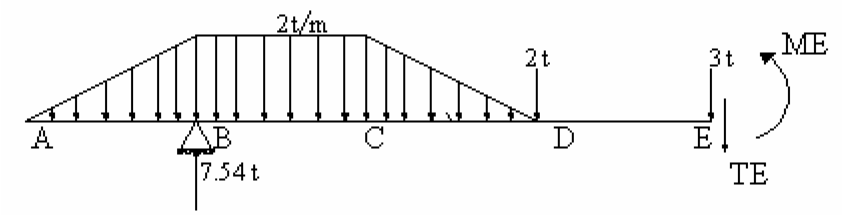
E'nin solunda:



$+\uparrow \sum y = 0$, $-1{,}5 + 7{,}54 - 3 - 1{,}5 - 2 + T_E = 0$ $T_E = -0{,}46$ ton

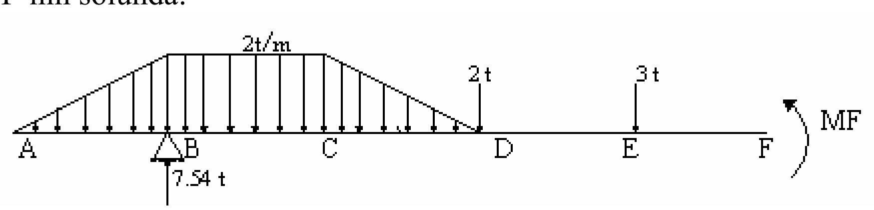
$+\sum M_E = 0$, $-1{,}5.5 + 7{,}54.4{,}5 - 3.3{,}75 - 1{,}5.2{,}5 - 2.1{,}5 - M_E = 0$ $M_E = 8{,}43$ t.m

E'nin sağında:



$+\uparrow \sum y = 0$, $-1{,}5 + 7{,}54 - 3 - 1{,}5 - 2 - 3 - T_E = 0$ $T_E = -3{,}46$ ton
$M_E = 8{,}43$ t.m

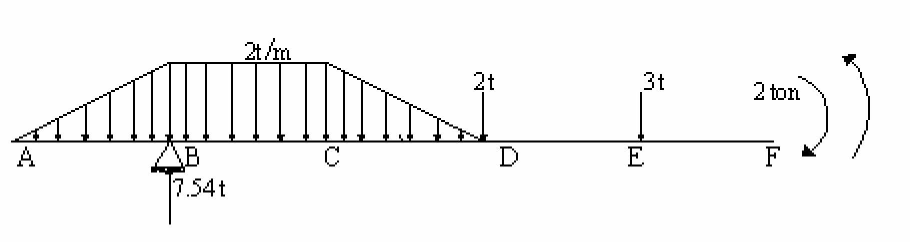
F'nin solunda:



$+\sum M_F = 0$, $-1{,}5.6{,}5 + 7{,}54.6 - 3.5{,}25 - 1{,}5.4 - 2.3 - 3.1{,}5 - M_F = 0$

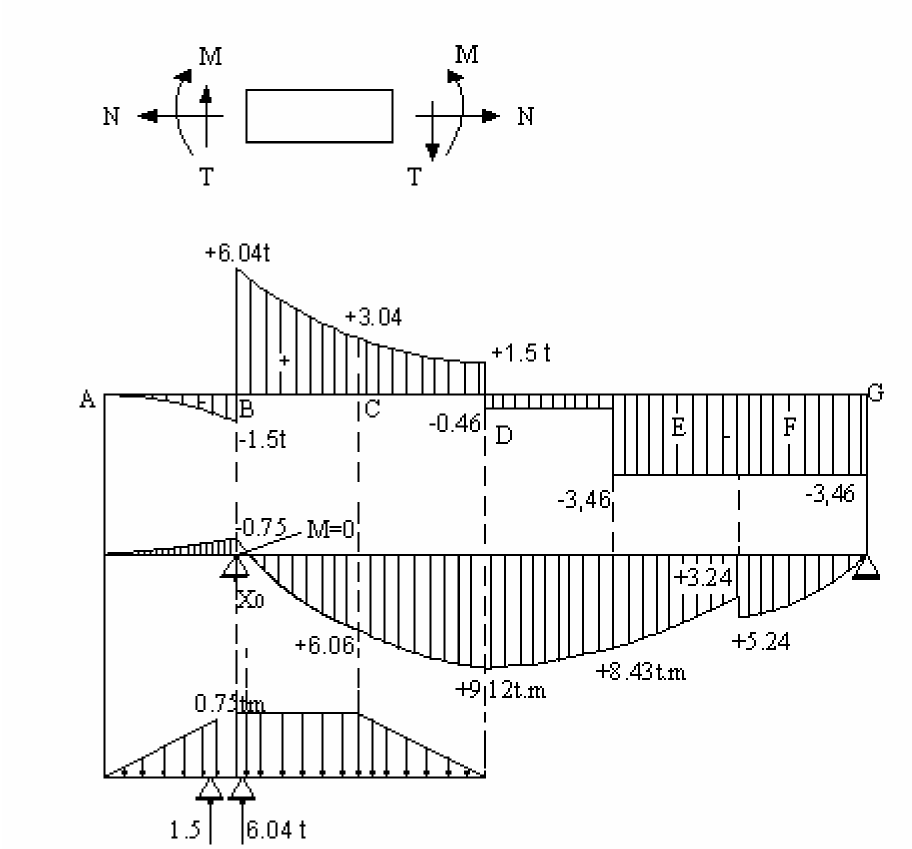
$M_F = 3{,}24$ t.m
$T_F = -3{,}46$ ton

F'nin sağında:



$M_F = 3,24 + 2 = 5,24$ t.m
$T_F = -3,46$ ton

M, N, T diyagramlşarının çizimi:



Momentin sıfır olduğu yerin bulunması

$$6,04.X_0 - 0,75 - 2.X_0.\frac{X_0}{2} = 0$$

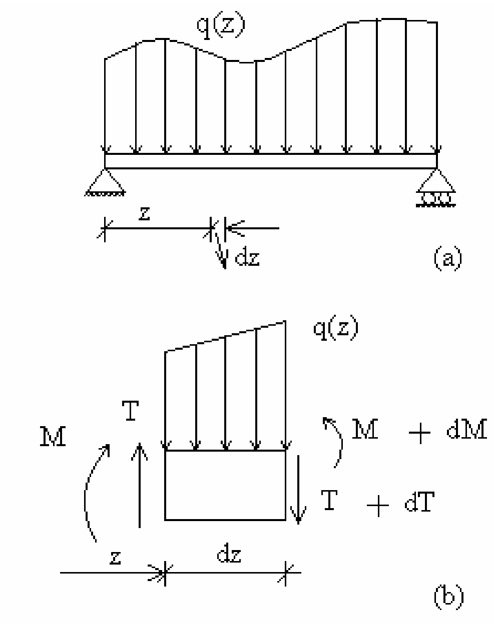
$$6,04.X_0 - X_0^2 - 0,75 = 0$$

$$X_0 - 0,165.X_0^2 - 0,124 = 0$$

$$X_{0_1} = \frac{0,165 \pm \sqrt{(0,165)^2 - 4.(0,124)}}{2} = 0,444m$$

Yayılı yük, Kesme Kuvveti ve Eğilme Momenti Arasındaki Bağıntılar

Yayılı yük, kesme kuvveti ve eğilme momenti arasında türev bağıntıları vardır. Bu bağıntıları elde etmek için düşey yayılı yükle yüklü bir çubuk gözönüne alalım.



Çubuktan çıkarılan bir dz parçası şekilde daha büyük gösterilmiştir. Bu parçanın iki yanında da iç kuvvetler vardır; bunlar şekilde işaretlenmiş ve dz kadar ilerleme sonucu iç kuvvetlerdeki ve yayılı yükteki artımlar gösterilmiştir. Çubuk parçasının dengede olduğunu ifade edelim: Düşey izdüşüm denklemi:

T – (T + dT) – (q dz) = 0

dz'ye bölerek buradan

$$\frac{dT}{dz} = -q$$

Elde edilir. Moment denklemi

$$-M + (M + dM) - T\,dz + (q\,dz)\left(\frac{1}{2}dz\right) = 0$$

dz'ye bölerek

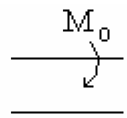
$$\frac{dM}{dz} = T - \frac{1}{2}q\,dz$$

T'den sonra gelen terim T'nin yanında ihmal edilir ve

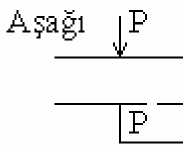
$$\frac{dM}{dz} = T$$

elde edilir.

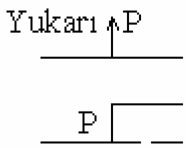
Bu iki önemli bağıntıdan ikincisi eğilme momentinin türevinin kesme kuvvetini verdiğini, birincisi ise kesme kuvvetinin türevinin yayılı yükün negatif işaretlisini verdiğini ifade etmektedir.[2]



Çubuk üzerinde tek bir moment varsa; moment saat ibresinin yönünde ise grafiğe ekleriz. Moment saat ibresinin ters yönünde ise çıkaracağız.



Eğer çubuk üzerinde tek bir kuvvet varsa tek yük aşağıya doğruysa kesme kuvvetine o kadar aşağıya iner. Yukarı doğruysa eklenir. Aşağı doğruysa çıkarılır.

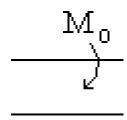


Önemli Noktalar

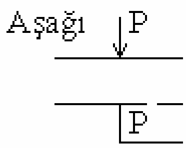
1. N ve T_y (+) olunca yukarıya M_x (+) olunca aşağıya yazılır.

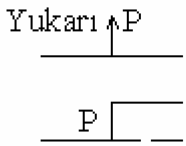
2. Diyagramlar daima başından çizilmeye başlanır.

3. Çubuk üzerinde tek bir moment varsa; moment saat ibresinin yönünde ise grafiğe ekleriz. Moment saat ibresinin ters yönündeyse çıkaracağız.



4. Eğer çubuk üzerinde tek bir kuvvet varsa; tek yük aşağı doğruysa kesme kuvveti de o kadar aşağı doğru iner: Yukarı doğruysa eklenir.



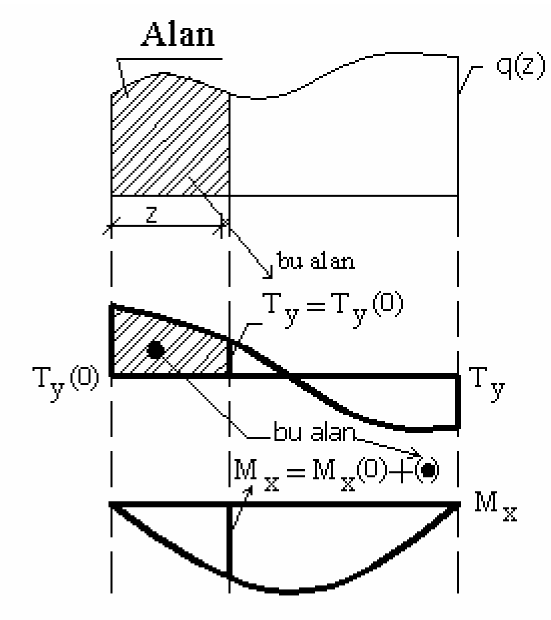


5. Kesme kuvvetinin sıfır olduğu noktada moment max. ya da min. olur.

6. T_y, düz (-) olunca M_x, eğik (\) olur. T_y (\) eğik ise M_x parabol olur.

Örnek :

Diyagramları bildiğimizi kabul edelim.



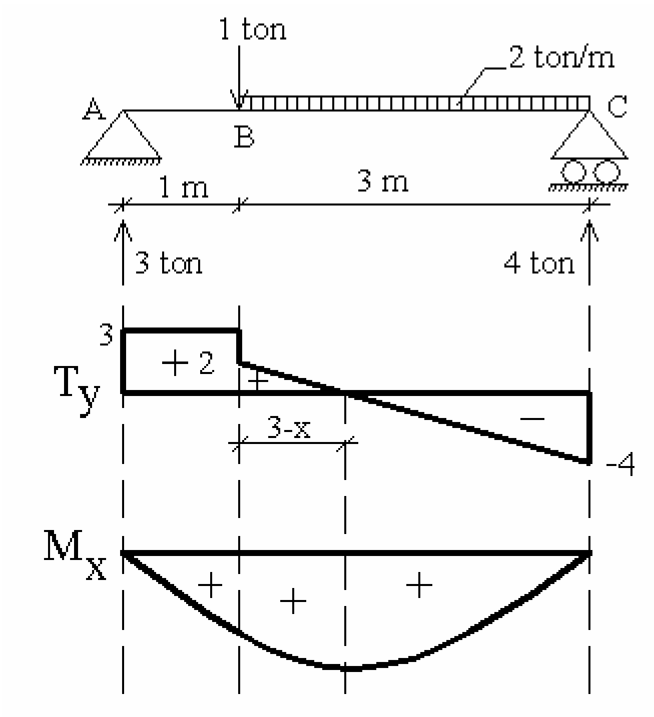
Not: T_y düz (-) olunca

M_x (\) eğik olur.

T_y (\) ise M_x parabol olur.

Kesme kuvvetinin sıfır olduğu noktada moment max. ya da min. olur.

Örnek:



Şekildeki çubuğun T_y ve M_x diyagramlarını çiz. Bağ kuvvetlerini hesapla.

II. bölgede $T_y = 2\text{-}6 = -4$

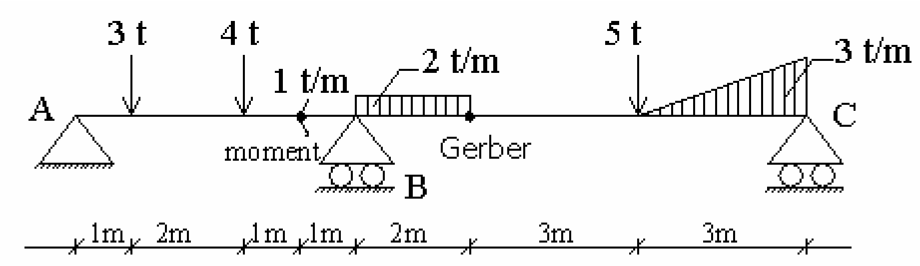
Momentte başlangıçta sabit mesnet var. Moment sıfır olur.

I. Bölgede T_y sabit olduğundan M_x doğrusal olacak II. Bölgede parabol olacak

$M_x = 3 + (-3) = 0$

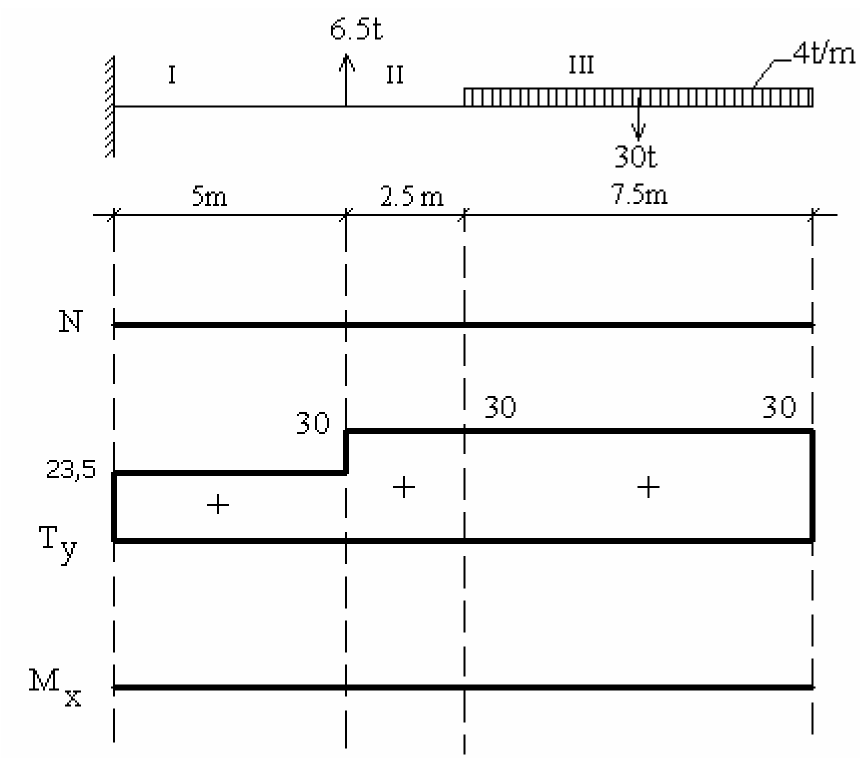
$\frac{M_x}{d\,z} = T_y = 0$ Ekstremum

Ödev :



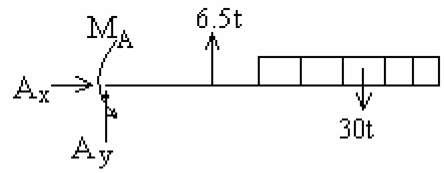
T_y ve M_x diyagramlarını çiz.

Uygulama



M_x ve T_y , N = ?

Önce bağlar bulunur.



$\Sigma F_x = 0$

$A_x = 0$ $\Sigma F_y = 0$

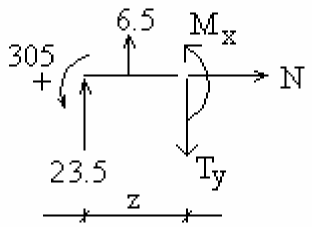
$A_y + 6.5 - 30 = 0$

$A_y = 23.5$ ton

$\Sigma M_A = 0$ $M_A.$ 6, 5 . 9 – 30. 11. 25

$M_A =$ 305 ton

I. Bölge



$N = 0$

$T_y - 23.5 = 0$

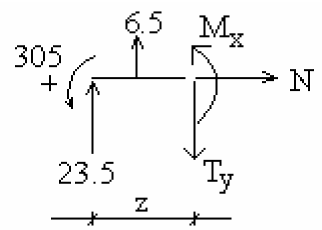
$T_y = 23.5$

$M_x + 305 - 23.5.\ z$

$M_x = -305 + 23.5.\ z$

$M_x = 187.5$

II. Bölge



$N = 0$

$23.5 + 6.5 - T_y = 0$

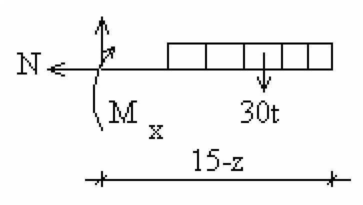
$T_y = 30$ t.

$M_x + 305 + 6.5\ (z-5) = 0$

$M_x = -305 - 6.5\ (z-5)$

$M_x = \ldots\ldots$

III. Bölge



$N = 0$

$\Sigma F_y = 0$

$T_y - 30 = 0$

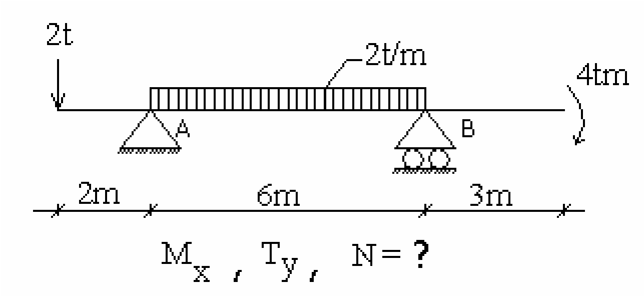
$T_y = 30$ t.

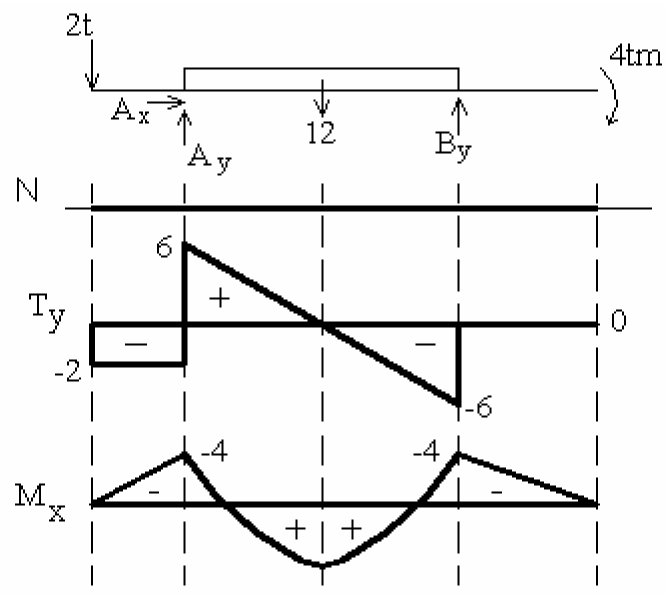
$M_x + 30\ (15\text{-}z) = 0$

$M_x = -30 - (15\text{-}z)$

$M_x = 0$

Örnek 2:





$\Sigma F_x = 0$ $A_x = 0$

$\Sigma F_y = 0$ $A_y + B_y – 12- 2 = 0$

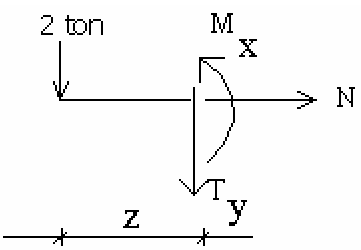
$A_y + B_y = 14$

$\Sigma M_A = 0$ $A_y = 8$ t

$4 – B_y .6 + 12.3 – 2.2 = 0$

$6 B_y = 36 \rightarrow B_y = 6$ t

I. Bölge

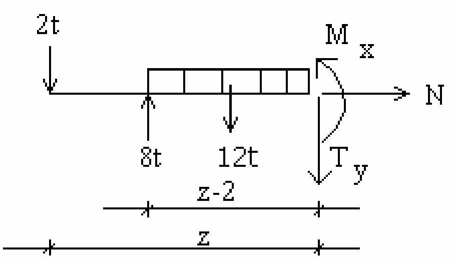


$N = 0$

$T_y + 2 = 0 \rightarrow T_y = - 2$ t

$M_x + 2 z = 0 \rightarrow M_x = - 2 z$

II. Bölge



$N = 0$

$T_y + 2 + 12 - 8 \rightarrow T_y = 6$

$M_{x2} = - z^2 + 10\,z - 20$

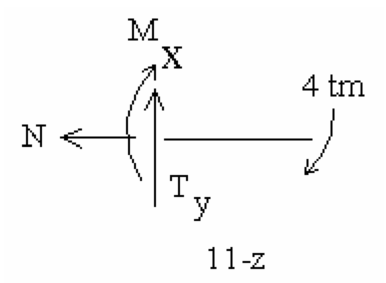
$z = 2$ için $M_x = - 4$ tm

$z = 8$ için $M_x = - 4$ tm

z yerine 5 koyarız (3 +2)

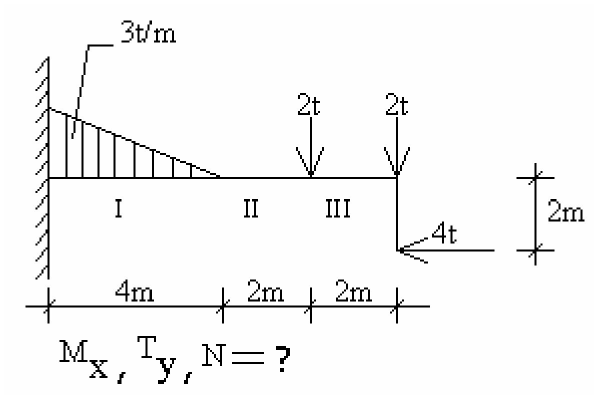
Böylece nereden geldiğini buluruz.

III. Bölge



$N = 0, \quad T_y = 0, \quad M_x = - 4$

Örnek:



$\Sigma\, F_x = 0$

$A_x - 4 = 0 \rightarrow A_x = 4$ t

$\Sigma\, F_y = 0$

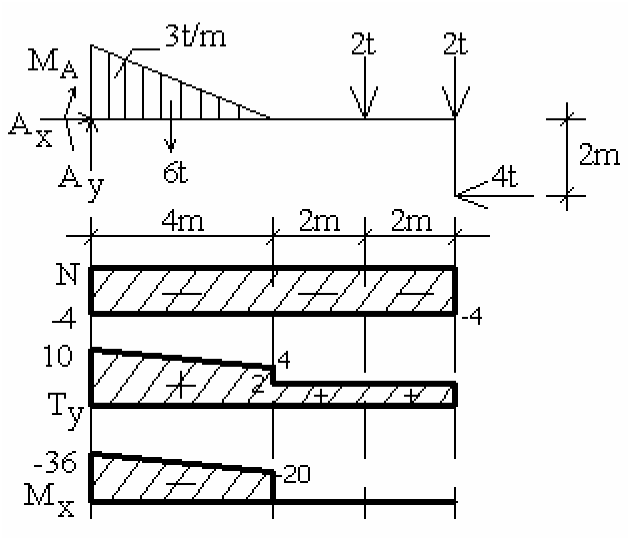
$A_y - 6 - 2 - 2 = 0$

$A_y = 10$ t

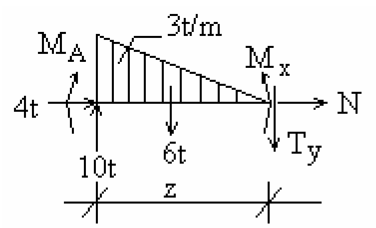
$\Sigma\, M_A = 0$

$M_A + 6.\dfrac{4}{3} + 2\,.\,6 + 2.\,8 + 4.2$

$M_A = - 44$ t



I. Bölge



$\Sigma F_x = 0$

$4 + N = 0 \rightarrow N = -4$

$T_y - 10 + 6 = 0 \rightarrow T_y = 4$ t

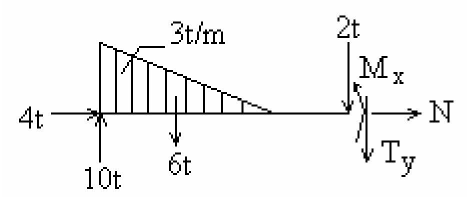
$M_A - 6.\frac{4}{3} - T_y \cdot z + M_x = 0$

$M_x = 4z - 36$

$z = 0 \rightarrow M_x = -36$

$z = 4 \rightarrow M_x = -20$

II. Bölge



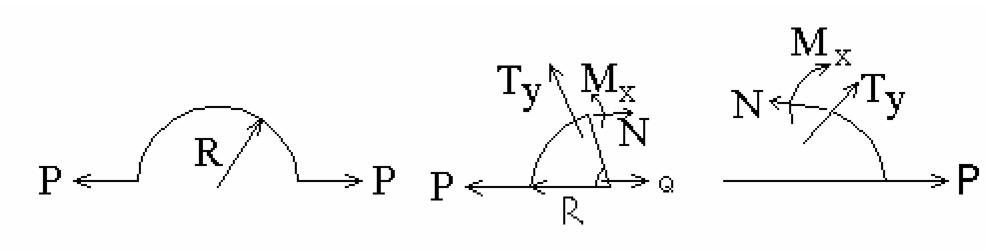
$\Sigma F_x = 0 \rightarrow N = -4$

$T_y + 2 + 6 - 10 = 0$

$T_y = 2$

$M_A - 6.\frac{4}{3} + 4.2 = 0$

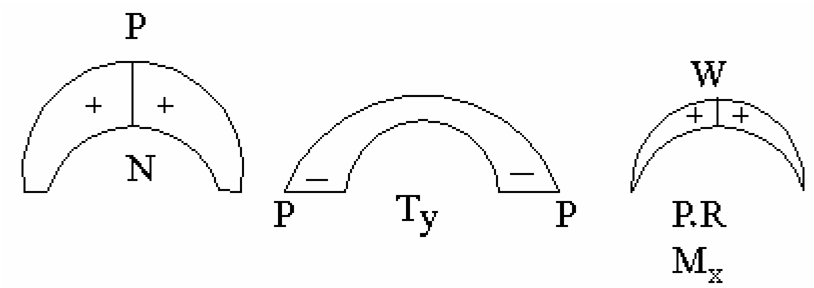
Çubuklar Eğri Eksenli

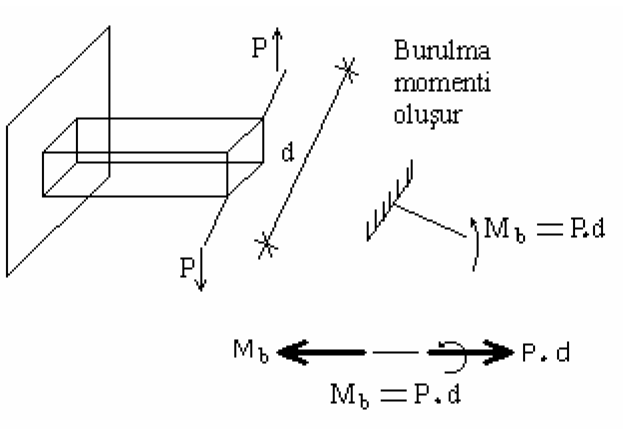


Σ Teğet = 0 $\quad N - P.\,\mathrm{Sin}\,\varphi = 0$

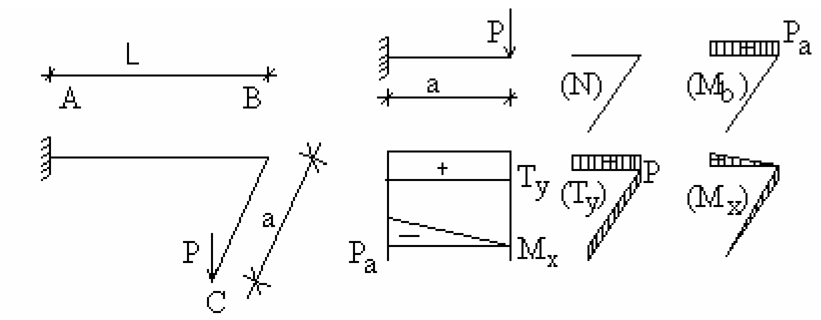
$T_y + P\,.\,\mathrm{Cos}\,\varphi = 0$

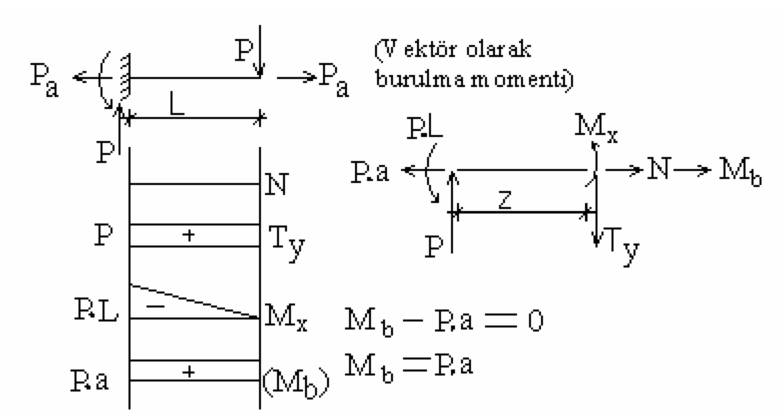
$M_x - P\,.R.\,\mathrm{Sin}\,\varphi = 0$





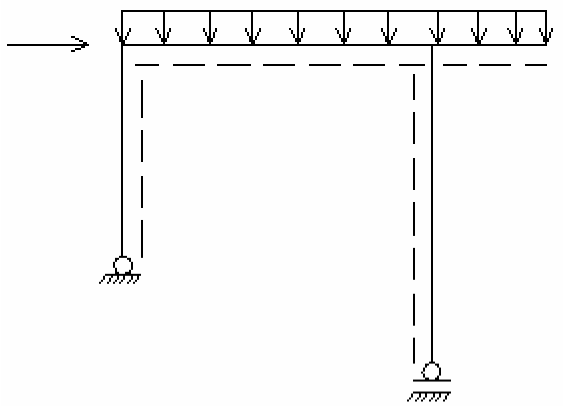
Örnek:





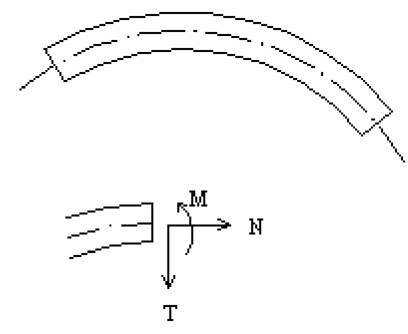
Çerçeveler ve Eğri Eksenli Çubuklar

Çerçeveler, uygulamada çoğu zaman doğru eksenli çubukların birbirine rijit bağlanması ile teşkil edilen çerçevelerin de iç kuvvetlerinin hesabı söz konusu olur. Bu takdirde her bir doğrusal kısım için bir ilerleme yönü seçilir. Bu yön her kısımda bir alt taraf belirtir. Şek. 2-12'de her parça için seçilen ilerleme yönünün sonucu olarak çubukların altına kesikli çizgiler çizilmiştir. İç kuvvetlerin işareti bakımından bunu yapmak zorunludur. Ondan sonra her bir parça ayrı bir çubukmuş gibi iç kuvvetler hesaplanır.[2]



Eğri eksenli çubuklar Eğri eksenli düzlemsel çubuklarda iç kuvvetlerin tanımı doğru eksenlilerle aynıdır. Burada çubuk kesitinin çubuk eksenine dik olacağını unutmamak gerekir.

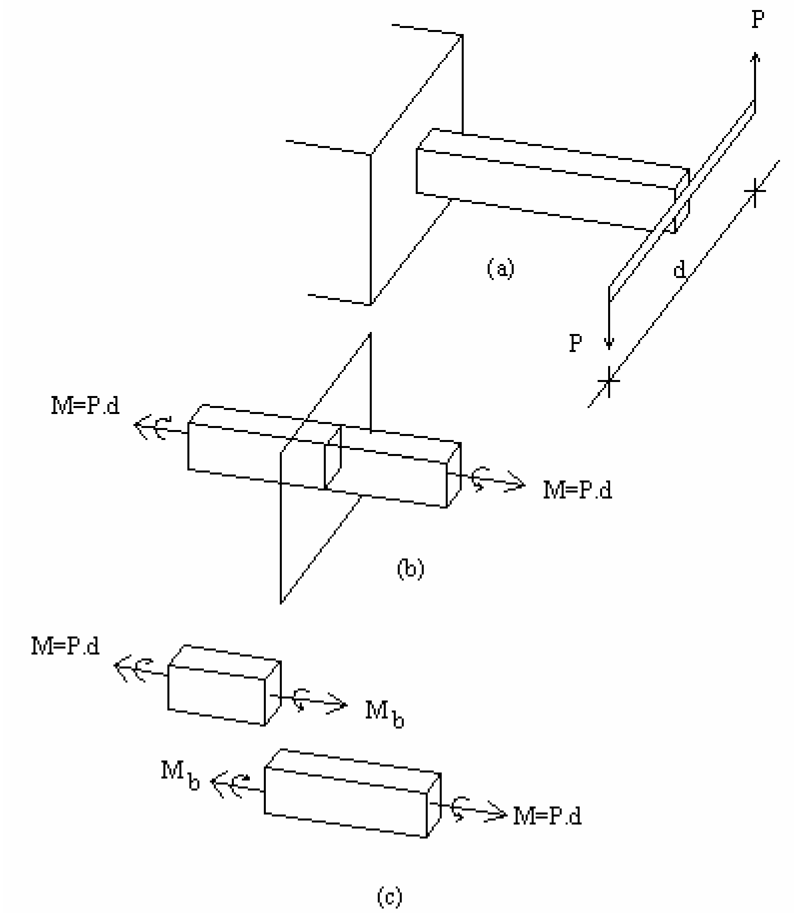
Bu bakımdan çubuk kesitleri bir birine paralel olmaz. Fakat iç kuvvetler kesitin normaline göre tanımlanırlar.



[2]

Uzaysal Yükler

Burulma Momenti



[2]

Önce çubuğa etkiyen basit bir uzaysal yük göz önüne alacağız. Şekilde gösterilen bu yük çubuğunun ekseninden geçmeyen bir çift kuvvet çiftidir. Momenti = P. d olan bu kuvvet çifti, ankastre mesnette yine kendisine eşit zıt yönlü bir kuvvet çifti ile dengelenir. Kuvvet çiftleri kendi düzlemlerine dik bir vektörle gösterilebileceğinden, gerek etkiyen kuvvet çiftini, gerek ankastre uçtaki tepki çiftini şekilde birer vektörle gösterdik ve kuvvet çifti vektörünün kuvvet vektörlerinden ayrılması için üstlerine birer dönüş işareti koyduk. Şüphesiz çubuğa başka noktalarında da aynı tipte kuvvet çiftleri etkiyebilir.

Çubuğun kesitinde meydana gelen iç kuvveti bulmak için yine kesim yöntemine başvurulabilir. İki parçaya ayrılan çubuğun bir parçasını göz önüne alıp bu parçanın dengesi için gerekli iç kuvveti koyalım. Bu bize burulma momentini verir. Bu halde kullanılan denge denklemi gerçekte *z* eksenine göre moment denklemidir, ancak bu denklem *z* doğrultusunda moment vektörlerinin vektörel izdüşüm dengesi olarak da düşünülebilir.

Etkiyen kuvvet çiftlerinin çok olması halinde tutulacak yol da aynıdır. Örneğin Şek. 2-15'de gtösterilen milde bir A kesitindeki burulma momentini bulmak için, mil A'dan kesilerek sol parça göz önüne alınmıştır. Moment denge denkleminden

$M_b+300-600=0$

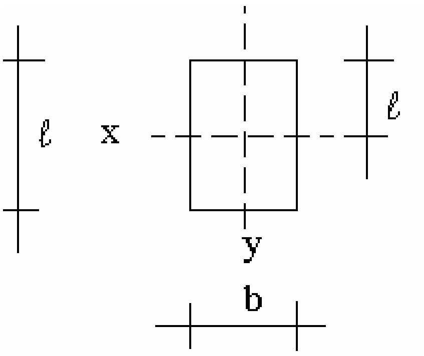
$M_b=300$ kgm

Olarak bulunur. Yapılan iş, normal kuvvet halindekine çok benzemektedir.

Eğer etkiyen yük kuvvet çifti değil de eksenden geçmeyen bir tekil yük ise, bu yük eksene indirgenir. Böylece eksene etkiyen bir tekil kuvvet ile bir kuvvet çifti elde edilir. Tekil yük eksene etkidiğinden, daha önce öğrenildiği gibi, kesme kuvvet ve eğilme momenti diyagramı çizilir. Kuvvet çifti ise, şimdi öğrenildiği gibi, burulma momenti meydana getirir.

Çerçeve ve eğri eksenli çubuklarda da çubuk düzlemine dik etkiyen kuvvetler burulma momenti meydana getirir.[2]

KİRİŞ HESAPLARI



Atalet momenti $I_x = \frac{bh^3}{12}$ $I_y = \frac{hb^3}{12}$ $W_x = \frac{bh^2}{6}$ $W_y = \frac{hb^2}{6}$

M= Eğilmeye tepki gösteren iç kuvvetlerin momentleri

M_{max}= Dış kuvvetlerin oluşturduğu eğilmeye tepki gösteren iç kuvvetlerin momentleri

Q_{max}= Dış kuvvetlerin oluşturduğu en büyük kesme kuvveti (k)

S_x,S_y = Statik momenti

M = M_{max} ile kiriş dengededir

Kiriş Kesitini Hesaplamada Kullanılan Formüller

1. $M_{max}=W.\sigma_{em}$

a- Dış yüklere göre kesit kontrolü

b- Momente göre kesit seçimi

2. $W = \frac{M_{max}}{\sigma_{em}}$

3. $\sigma = \frac{M_{max}}{W}$

$\sigma<\sigma_{em}$

(Kesit yeterli) Eğilme gerilmesi kontrolü

4. $T = \frac{Q_{max}.S_x}{b.I_x}$ $\tau \leq \tau_{em}$ (kg/cm^2)

5. $S_x = \frac{bh^2}{8}$ cm^3

6. $f = \frac{5}{384}.\frac{q.l^4}{E.I} \leq f_{max}$

$f = \frac{l}{700}$ (Kafes kirişlerde)

l= Kiriş açıklığı

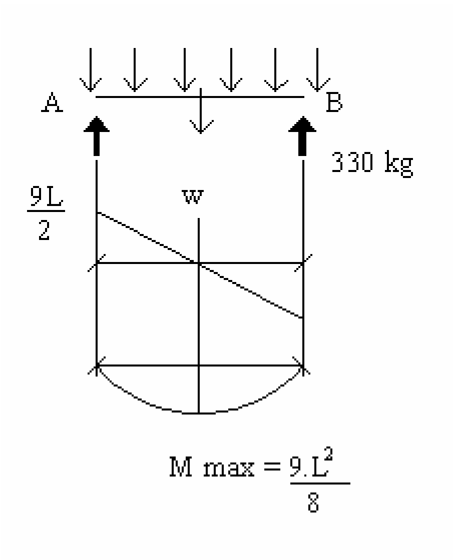
$f = \dfrac{l}{400}$ (Dolu gövdeli ve kamalı kirişlerde)

$f = \dfrac{l}{150}$ (Konsol kirişlerde)

$f = \dfrac{l}{300}$ l=5-7 (Çelik kirişlerde)

$f = \dfrac{l}{500}$ l>7 den (Çelik kirişlerde)

Soru :



1. Mesnet tepkilerini bulunuz.

$$220.\frac{3}{2} = 330$$

2. Kesme momentini.

3. Eğilme momenti.

4. En büyük eğilme momenti

$$M_{\max} = \frac{q.l^2}{8} = \frac{220.3^2}{8} = 247.5\,kgm$$

5. Uygun kiriş kesitini seçiniz.

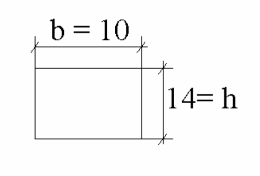
Çözüm :

II. sınıf çam

σ_{em}= 100 kg/cm^2

M_{max}=W.σ_{em}

$$W_{gerekli} = \frac{M_{\max}}{\sigma_{em}} = \frac{24750}{100} = 247.5\,cm^3$$



Kesit = 10.14 = 140

I_x=22.87 cm^4

W_x = 327 cm^3

$\frac{b}{h} = \frac{5}{7}$ yi sağlayacak kesitm

6. Eğilme gerilme kontrolü

$$\sigma = \frac{M_{\max}}{W_x} = \frac{24750}{327} = 76\,kg/cm^2$$

$\sigma<\sigma_{em}$ ise 76<100 olduğundan uygun

7. kayma gerilmesi kontrolü

Q_{max}=330 kg

$$S_x = \frac{bh^2}{8} = \frac{10.(14)^2}{8} = 245\,cm^2$$

8. $T = \frac{Q_{\max}.S_x}{b.I_x} = \frac{330.245}{10.2287} = 2.53$ kg/cm^2

II. sınıf çam için τ_{em}=9 kg/cm^2

$\tau<\tau_{em}$ olduğu için uygun

2.53 < 9 kg/cm^2

9. Sehim kontrolü

E= Elastisite modülü = 100000 kg/cm^2

l= 300 cm

$$f = \frac{5}{384}.\frac{q.l^4}{E.I} \leq f_{\max}$$

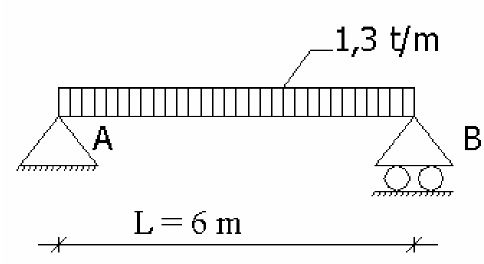
$$f = \frac{5}{384}.\frac{2.2.(300)^4}{100000.2287} = 1 \text{ cm}$$

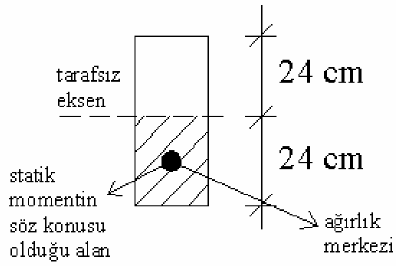
q yu kg/m den kg/cm çevirmemiz lazım.

$f = \frac{l}{300} = \frac{300}{300} = 1\,cm$ $f=f_{max}$ emn.

$f = \frac{l}{300} = \frac{300}{100} = 3\,cm$ $f<f_{max}$ emn.

Örnek :





Malzeme II. Sınıf çam

σ_{em} = 100 kg/cm^2

σ_{em} = 85 kg/cm^2

τ_{em} = 9 kg/cm^2

E = 100000 kg/cm^2

Şekilde görülen iki parçalı kirişte gerekli kontrolleri yapınız.

1. Mukavemet değerlerinin hesabı:

$$I = \frac{b\,h^3}{12} = \frac{20\,(48)^3}{12} = 184320\,cm^4$$

$$W = \frac{I}{y_{\max}}\,veya = \frac{b\,h^2}{6} = \frac{20\,(48)^2}{6} = 7680\,cm^3$$

I_n = 0.6 I = 0.6 . 184320 = 110600 cm^4

W_n =0.8 W = 0.8 . 7680 = 6144 cm^3

2. Statik değerlerin hesabı :

$$M_{\max} = \frac{q\,l^2}{8} = \frac{1.3\,x\,(6)^2}{8} = 5.85\,tm$$

$$Q_{\max} = \frac{q\,l}{2} = \frac{1.3\,x\,6}{2} = 3.9\,ton$$

3. Kontroller :

a) Eğilmeye göre kontrol:

$$\sigma = \frac{M_{\max}}{W_n} = \frac{585000\,kg\;cm}{6144\,cm^3} = 95\,kg/cm^2 < 100\,kg/cm$$

b) Kesme kontrolü

$$\tau = \frac{Q_{\max}\,.S}{b.I}$$

Statik moment = alan x kendi ağırlık merkezinin tarafsız eksene olan mesafesi

= (b x h) x (h/2)

S = 20 x 24 x 12 = 5760 cm^3

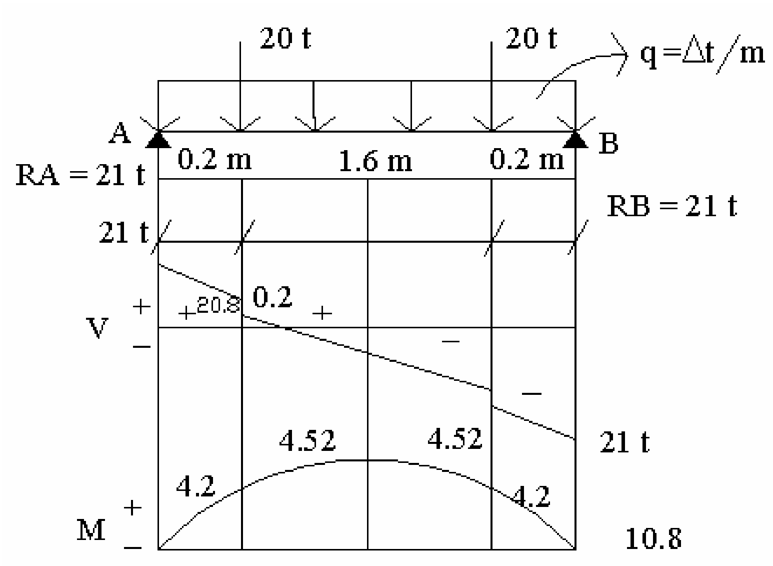
$$\tau = \frac{3900.5760}{20x184320} = 6.1 kg/cm^2 < \tau_{em} = 9 kg/cm^2$$

c) Sehim kontrolü :

$$f = \frac{5}{384} \cdot \frac{q l^4}{E I_n} = \frac{5}{384} \cdot \frac{13 x (600)^4}{100000.110600}$$

$$= 1.98 cm < \frac{L}{300} = \frac{600}{300} = 2 cm$$

Soru :

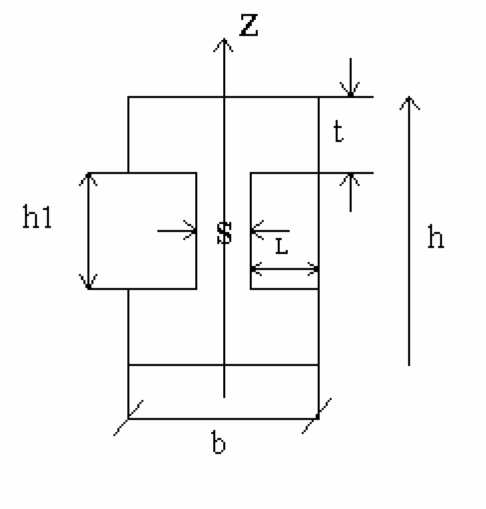


İki mesnetli basit kirişin yükleme durumu ve kesit şekli gösterilmiştir. Emniyet gerilmeleri çekme ve basınç için:

$$\left.\begin{array}{l} \sigma_{em} = 1600 kg/cm^2 \\ \tau_{em} = 1050 kg/cm^2 \\ statik\ moment = 231.3 \\ S_y = 231.3 \\ Kesitteki\ boyutlar: h = 240 mm \\ \qquad\qquad\qquad b = 118 mm \\ E = 10 mm \\ t = 13 mm \end{array}\right\}$$ bu koşullara göre kirişin emniyetli olup olmadığını gösterin

Her kesite gelen yük 1 tondur.

Q= 1.0,2 = 0,2 tonm



Çözüm

Q = 1.2 = 2 t

$\sum M_A = 0 \;\Rightarrow\; 20.0,2 + 2.1,0 + 20.1,8 - R_B.2 = 0 \;\Rightarrow\; R_B = 21t$

$\sum F_y = 0 \;\Rightarrow\; R_A - 20 - 2 - 20 + 21 = 0 \;\Rightarrow\; R_A = 21t$

Alanlar

1. Yamuk $\Delta_1 = \dfrac{21 + 20.8}{2}.0,2 = 4,2\,tonm$ (1. moment)

2. Üçgen : $\Delta_2 = \dfrac{0,8.0,8}{2} = 0,32\,tonm$ (2. moment)

3. Üçgen : $\Delta_3 = \dfrac{0,8.0,8}{2} = 0,32\,tonm$ (3. moment)

4. Yamuk $\Delta_4 = \dfrac{21 + 20.8}{2}.0,2 = 4,2\,tonm$ (4. moment)

M_1= 4,2 ton

M_2= 4,2 + 0,32 = 4,52

M_3=4,52 – 0,32 = 4,20

M_4= 4,2 ton

Eğilme yönünden kontroller

$\sigma = \dfrac{M_{\max}}{W} \le \sigma_{em}$ (bunda W de bulup gerçek mukavemet momenti ilede karşılaştırabiliriz.)

M_{max} = 4,52 ton

Q_{max} =21 ton

I profili için atalet momenti $I_y = \dfrac{b.h^3}{12} - 2.\dfrac{l.h^3}{12}$

Mukavemet momenti $W_y = \frac{I_x}{12}$ $I_y = \frac{11,8.(24^3)}{12} - 2.\frac{5,4.(21,4^3)}{12}$ ise I_y=4750 cm^4

$W = \frac{4750}{12} = 396\,cm^3$

b=11,8 cm ise $\frac{11,8}{2} = 5,9$ 5,9-0,5=5,4

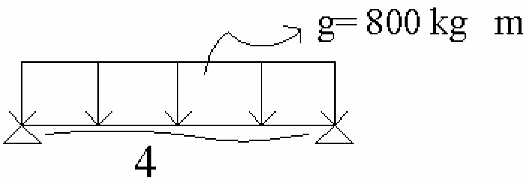
4,52 tm = 452000 kgcm

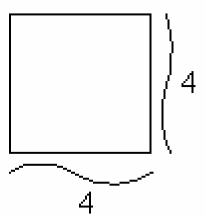
$\sigma = \frac{452000}{396} \cong 1135 < 1600$ olduğundan emniyetlidir.

Kayma gerilmesi kontrolü

$\tau = \frac{Q_{\max}.S_y}{b.I_y} \leq \tau_{em}$ olduğundan emniyetlidir.

Soru :





Kirişin sargı yönünden emniyetli olup olmadığını kontrol ediniz.

E=2,1.10^6 kg/cm^2

Çözüm:

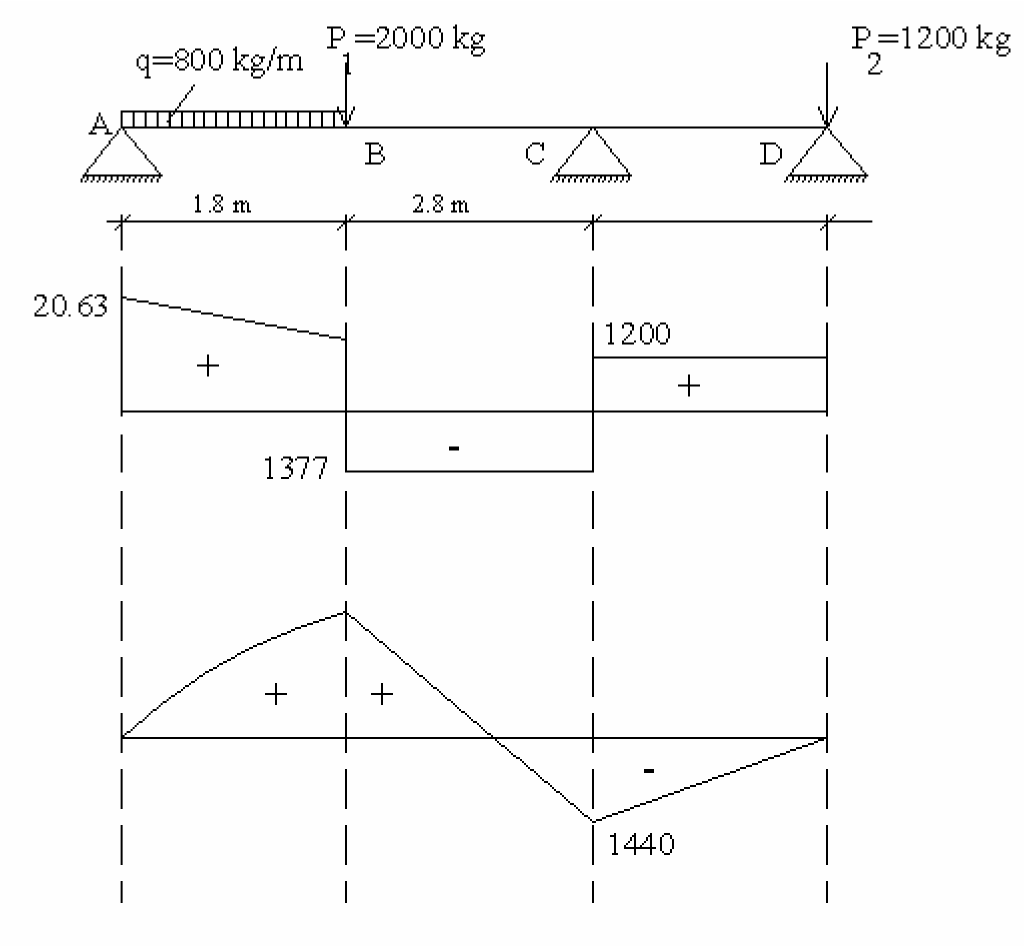
$$f_{\max} = \frac{5}{384}.\frac{q.l^4}{E_x.I_x} \Rightarrow \frac{5}{384}.\frac{800.400^4}{2,1.10^6.21,3} \Rightarrow f = 59,5$$

$$I_x = \frac{a^4}{12} = \frac{4^4}{12} = 21,3\,cm^4$$

$$\frac{l}{300} \quad veya \quad \frac{l}{500} \geq f_{\max} \Rightarrow \frac{400}{300} \quad veya \quad \frac{400}{500} \geq 59,5$$

1,33 veya 0,8<5,9 olduğundan kiriş emniyetsizdir.

Soru :



II. Sınıf çam ahşap kullanılmıştır.

Kirişin kesiti 7x15

σ_{em}=100 kg/cm^2

τ_{em}= 9 kg/cm^2

a. kesme kuvveti ve eğilme momenti diyagramlarını çizerek max. Değerlerini belirtin.

b. kirişte gerekli kontrolleri yaparak kiriş kesitinin kayma gerilmesi eğilme gerilmesi yönünden yeterli olup olmadığını gösterin.

Çözüm :

Q = 800.1,8 = 1440

$$\sum M_A = 0 \;\Rightarrow\; 1440.0{,}9 + 2000.1{,}8 - R_B.4{,}6 + 1200.5{,}8 = 0 \;\Rightarrow\; R_B = 2577$$

$$\sum F_y = 0 \;\Rightarrow\; 2577 - 1440 - 2000 + R_A - 1200 = 0 \;\Rightarrow\; R_A = 2063$$

V değerleri

$0{,}9.800 = 720 \;\}\Rightarrow\; 2063 - 720 = 1343$

1343 – 720 = 623

2000 – 623 = 1377

2577 – 1377 = 1200

Alanlar:

$$M_1 = \Delta_1 = \frac{2063+623}{2}.1{,}8 = 2417\,kgm$$

(alanlar momente eşittir.)

$M_2 = \Delta_2 = 1377.2{,}8 = 3855$ kgm (serbest uçlar ve mesnetlerde M = 0 dır.)

$M_3 = \Delta_3 = 1200.1{,}2 = 1440$ kgm

$Q_{max} = 2063$ kg

$M_{max} = 2417$ kgm

$\sigma_{max} = \dfrac{M_{max}}{W} \leq \sigma_{em} \quad \Rightarrow$ emniyetlidir.

$$W = \frac{b.h^3}{6} = \frac{7.(15)^3}{6} = 263 \quad \Rightarrow \quad \sigma_{max} = \frac{2417}{263} = 919\,kg/cm^2$$

$\sigma > \sigma_{em}$ olduğundan emniyetsizdir.

Kayma gerilmesi kontrolü

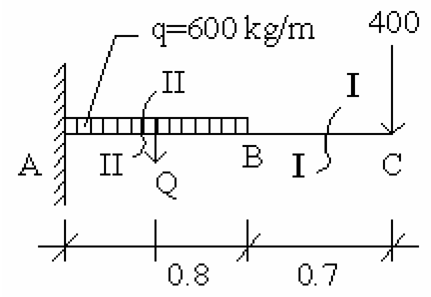
$\tau = \dfrac{Q_{max}.S_y}{I_x.b} \leq \tau_{em}$ emniyetlidir.

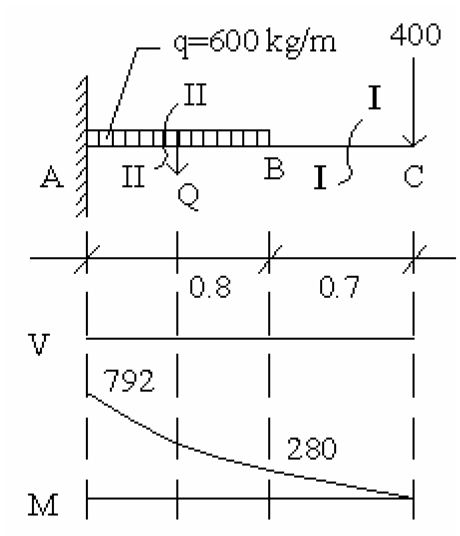
$$I_x = \frac{b.h^3}{12} = \frac{7.(15)^3}{12} = 1969$$

$$S_x = \frac{bh^2}{8} = \frac{7.(15)^2}{8} = 197$$

$\tau = 29{,}49$ $\tau_{em} = 9$ $\tau > \tau_{em}$ olduğundan emniyetsizdir.

Soru :





2. Sınıf çam ahşap malzeme kullanılmış

$\sigma_{em} = 100\ kg/cm^2$

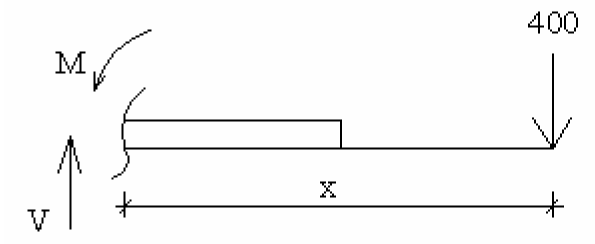
$\tau_{em} = 9\ kg/cm^2$

Kesit = 12 x 16

Çözüm

Q = 600 x 0.8 = 480 kg

$\uparrow \Sigma F_y = 0$ ise $R_A = 480 - 400 = 0$ ise $R_A = 880$



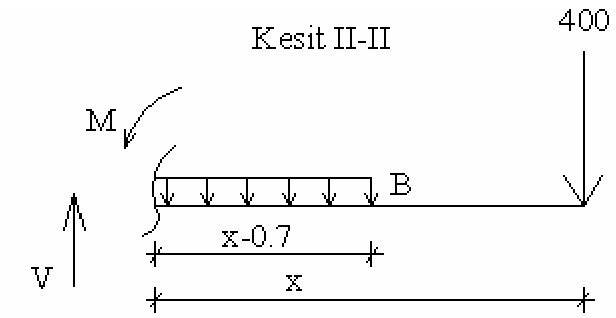
$0 \leq x \leq 0.7$

$\uparrow \Sigma F_y = 0$ ise $V - 400 = 0$ ise $V = 400$ (B deki kesme kuvveti)

$\Sigma M_0 = 0$ $\quad -M + 400\ x$

x = 0 için $\quad$ M = 0 $\quad$ (C nokt. moment)

x = 0.7 için $\quad$ M = 280 kgm $\quad$ (B nokt. moment)



↑$\Sigma F_y = 0$ ise $V - q(x-0.7) - 400 = 0$

$V = q(x-0.7) + 400$

x = 0.7 için V = 400 kg (B nokt) eşit olması gerekir.

x = 1.5 için V = 880 kg (A nokt)

$\Sigma M_0 = 0$ ise $-M + q(x-0.7)\left(\frac{x-0.7}{2}\right) + 400x = 0$

x = 0.7 için M = 280 kgm (B noktası ile aynı olması gerekir.)

x = 1.5 için $M = 600(1.5-0.7)\left(\frac{1.5-0.7}{2}\right) - 400 \times 1.5 = 792$ kgm (A nokt)

$Q_{max} = 880$ kg

$M_{max} = 792$ kg

$$W = \frac{bh^2}{6} \Rightarrow \frac{12x(16)^2}{6} = 512\,cm^3$$

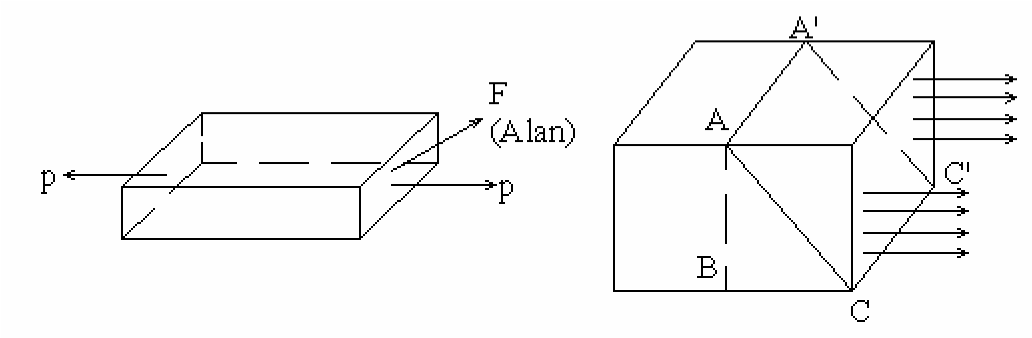
$$\sigma = \frac{M_{\max}}{W} = \frac{79200}{512} = 154.99 > 100$$ olduğundan emniyetsiz (Kesit uygun değil)

$$\tau = \frac{Q_{\max}\, x S_y}{I_x\, x b} = \frac{880x384}{12x4096} = 6.88 < 9$$ emniyetli

$$S_y = \frac{bh^2}{8} = 384\,cm^2$$

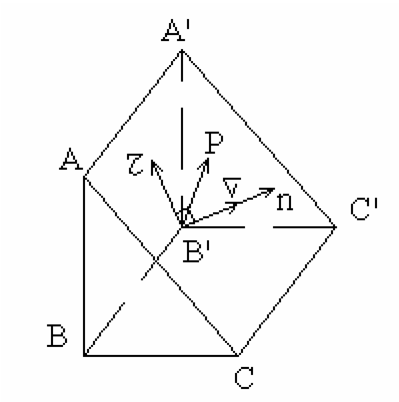
$$I_x = \frac{bh^3}{12} = 4096\ cm^4$$

MUKAVEMETİN TEMEL KAVRAMLARI



$$\sigma = \frac{N}{F}$$

$$\sigma = \frac{N}{F} = \frac{P}{F}$$



Yatayla α açısı yapan yüzeyde gerilmeyi bulalım.

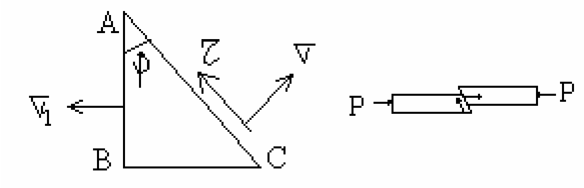
Taralı yüzeydeki gerilmeyi bulalım, yüzey içindeki bileşeni τ, normal üzerindeki bileşeni σ olsun.

Bir eğik düzlem üzerinde hem kayma hem de normal gerilme vardır.

τ = Kayma gerilmesi

σ = Normal gerilme

φ = Yatayla o yönün normalle yaptığı açı



$$-\sigma_1.\overline{AB}.1+\sigma.\overline{AC}.Cos\varphi-\tau\,\overline{AC}.Sin\varphi.1=0$$

σ_1 Birim alanın gerilmesi

$-\sigma_1.\overline{AC}.1\ Sin\varphi+\tau.\overline{AC}.\ 1Cos\varphi=0$ (AC'ye bölüyoruz)

$$\tau=-\sigma.tg\,\varphi$$

$$-\sigma_1 \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} + \sigma . Cos\,\varphi - \tau\, Sin\,\varphi = 0$$

$$-\sigma_1 .Cos\,\varphi + \sigma .Cos\,\varphi + \sigma\;tg\,\varphi\, Sin\,\varphi \;= 0$$

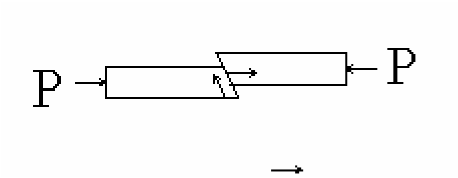
$$-\sigma_1 .Cos^2\varphi + \sigma .Cos^2\varphi + \sigma\;tg\,\varphi\, Sin^2\,\varphi \;= 0$$

$\sigma = \sigma_1 .Cos^2\varphi$ Normal gerilme

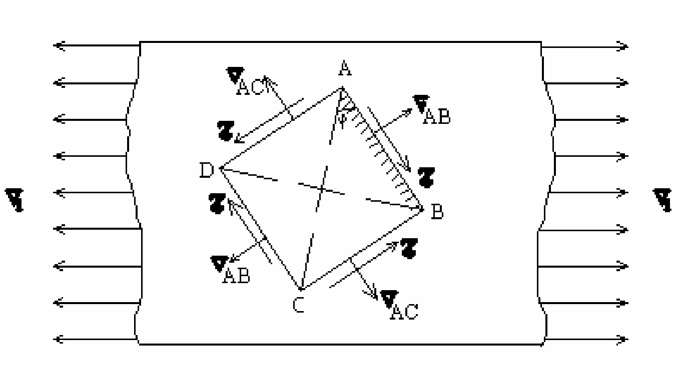
σ'yı yukarıdaki τ'da yerine koyarsak

$\tau = -\sigma_1 .Sin\,\varphi .Cos\,\varphi$ Kayma gerilmesi

Bir eğik düzlem üzerinde hem normal, hem de kayma gerilmesi vardır. Bu gibi hallere ***bir eksenli gerilme hali*** denir.



Tek Eksenli Gerilme Hali



$$\sigma = \sigma_1 .Cos^2\varphi$$

$$\tau = -\sigma_1 .Sin\,\varphi .Cos\,\varphi$$

Bu formüller her yüz için geçerlidir yalnız φ değişir.

φ = Yatayla o yüzün normalinin yaptığı açı

$$\overline{AB} = \varphi$$

$$\overline{DC} = \varphi + 180°$$

$$\overline{CA} = \varphi + 90°$$

$$\overline{DB} = \varphi + 270°$$

$$\sigma_{CA} = \sigma_1 .Cos^2(\varphi + 90°) = \sigma_1 .Sin^2\,\varphi$$

$$\tau_{CA} = \sigma_1 .Sin(\varphi + 90°).Cos(\varphi + 90°)$$

$$\tau_{CA} = -\sigma_1 .Sin\,\varphi\;.Cos\,\varphi = -\tau_{AB}$$

Mohr dairesi

$$\left.\begin{aligned}&\sigma=\sigma_1 .Cos^2\varphi\\&Cos^2\varphi=\frac{1}{2}\left(1+Cos^2\,\varphi\right)\end{aligned}\right\}\quad\begin{aligned}&\sigma=\sigma_1\left(\frac{1+Cos^2\varphi}{2}\right)\\&\sigma-\frac{\sigma_1}{2}=\frac{\sigma_1}{2}Cos^2\varphi\end{aligned}$$

$$\tau=-\,\sigma_1\,.Sin\,\varphi.Cos\,\varphi$$

$$Sin\,\varphi.Cos\,\varphi=\frac{1}{2}Sin\,2\,\varphi\rightarrow\tau=-\,\sigma_1\,\frac{Sin^2\varphi}{2}$$

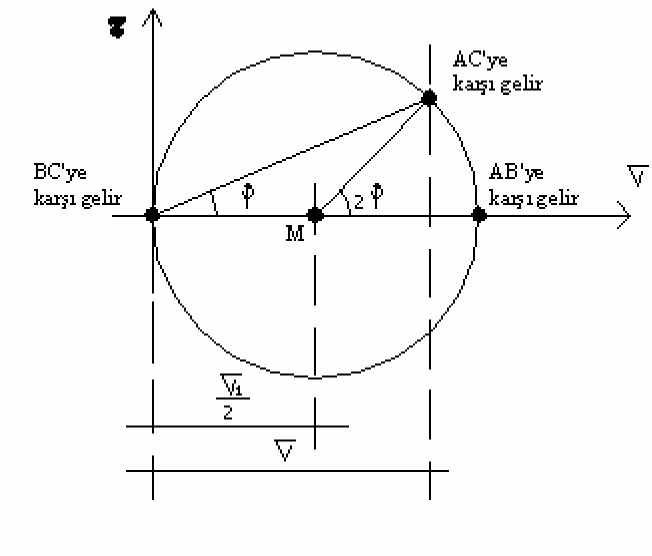
$$\tau=-\frac{1}{2}\sigma_1\,.Sin^2\,\varphi$$

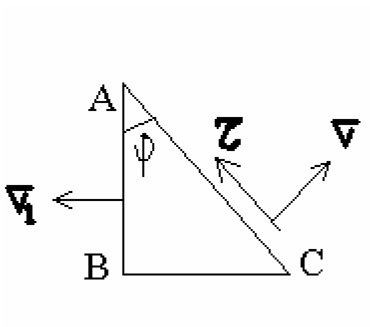
φ açısı yok edilirse

$$\left(\sigma-\frac{\sigma_1}{2}\right)^2+\tau^2=\left(\frac{\sigma_1}{2}\right)^2$$

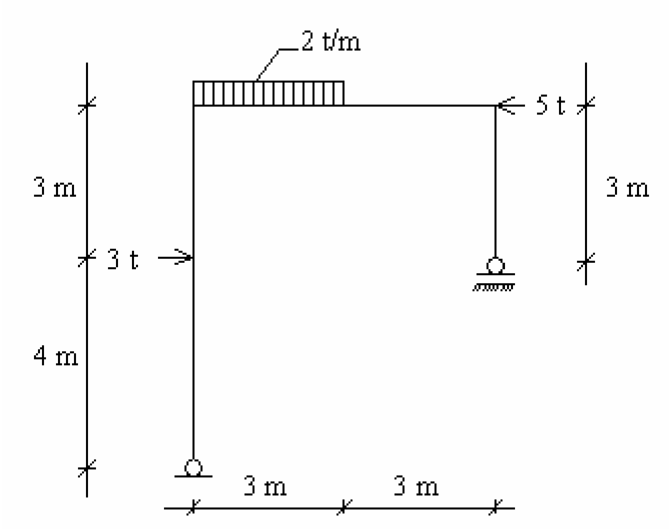
Absis + ordinat = yarıçap

Daire denklemi



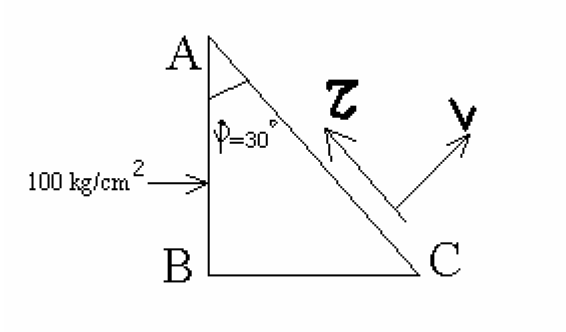


Uygulama 1



Şekildeki çerçeveye ait moment, kesme kuvveti, normal kuvvet diyagramlarını çiziniz?

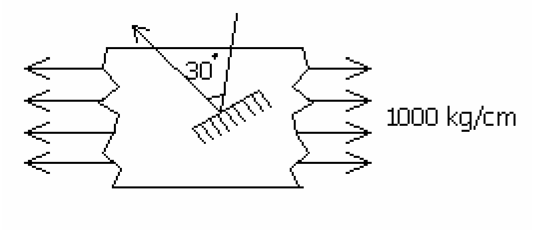
Uygulama 2



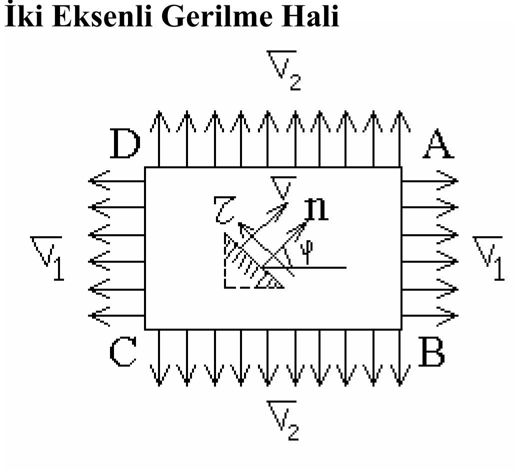
AC yüzeyindeki σ (normal),
τ (kayma) gerilmelerini bul?
Gerilme durumunu
Mohr dairesinde göster?

Uygulama 3

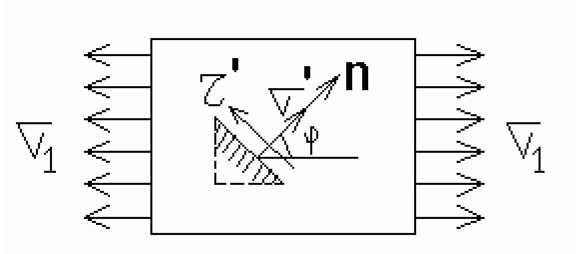
Şekildeki cismin eğik yüzeyindeki gerilmelerini bulunuz ve Mohr dairesinde gösteriniz?

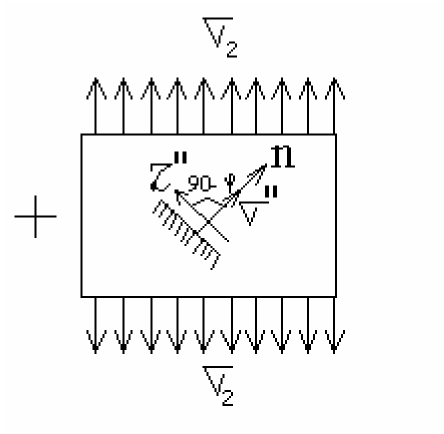


İki Eksenli Gerilme Hali



Cismin içindeki herhangi bir kesitteki normal ve kayma gerilmelerini arıyoruz.





$\sigma^{1} = \sigma_1 .Cos^2 \varphi$

$\sigma^{11} = \sigma_2 .Cos^2 (90 - \varphi)$

$\sigma = \sigma^{1} + \sigma^{11}$

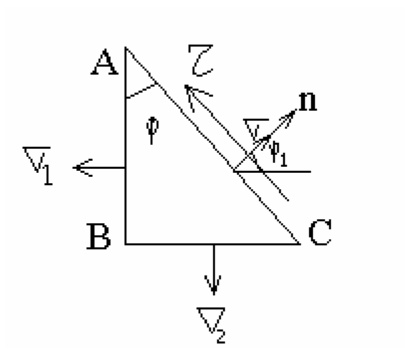
$\tau^{1} = -\sigma_1 .Sin\,\varphi .Cos\varphi$

$\tau^{11} = -\sigma_2 .Sin(90 - \varphi).Cos\,(90 - \varphi)$

$\tau = \tau^{1} + \tau^{11}$

$\sigma = \sigma_1 .Cos^2\,\varphi + \sigma_2 .Sin\,\varphi .Cos\varphi$

$\tau = -\sigma_1 .Sin\,\varphi .Cos\,\varphi + \sigma_2 .Sin\,\varphi .Cos\varphi$



1. $\sigma_{AC} - \gamma_1\, \bar{AB}.Cos\varphi - \sigma_2\, \bar{BC}\, Sin\varphi$

2. $\tau_{\bar{AC}} + \gamma_1\, \bar{AB}\, Sin\varphi - \sigma_2\, \bar{BC}\, Cos\varphi$

$D = \sigma = \sigma_1 .Cos^2\varphi + \sigma_2 .Sin\varphi$

$\tau = -\gamma_1 Sin\,\varphi .Cos\,\varphi + \sigma_2 .Sin\,\varphi .Cos\,\varphi$

İki açı cinsinden:

3. $\sigma = \dfrac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \dfrac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \times Cos2\varphi$

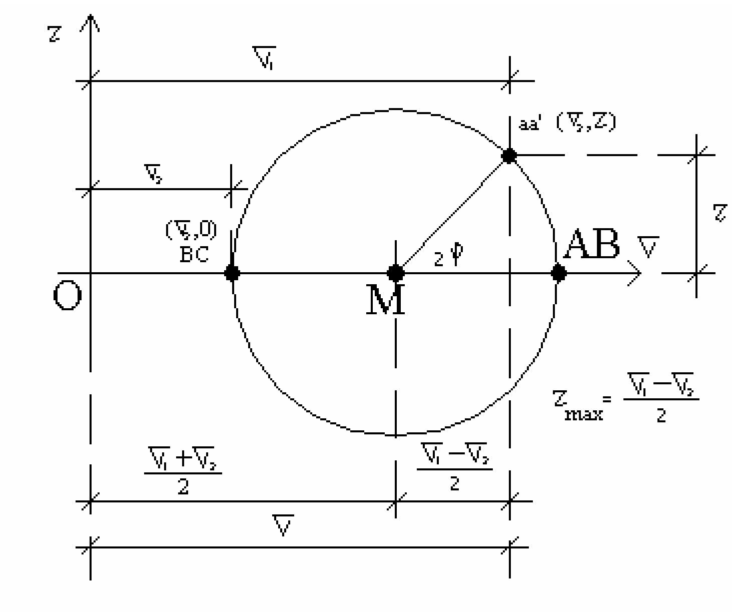
$\tau = \dfrac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \times Sin2\varphi$

φ açısını yol edelim.

İki eksenli gerilme durumunda Mohr dairesi denklemi

$$\left[\sigma-\left(\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}\right)\right]^2+\tau^2=\left(\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\right)^2$$

Burada $\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}$ dairenin yarı çapıdır.



AB'nin τ = sıfır sadece σ_2'i var. O yüzden daire üzerinden τ = 0, σ_1 olan yeri işaretleriz. BC'nin σ = 0, τ'su var.

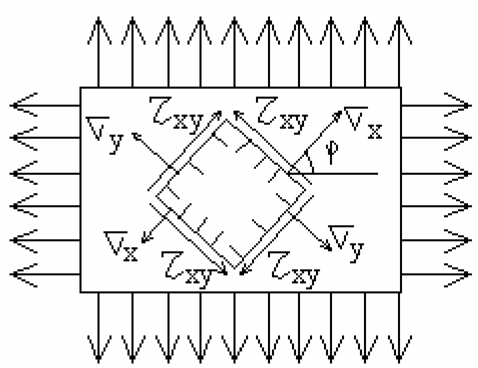
aa′ = 3 numaralı denklemden hesaplanır.

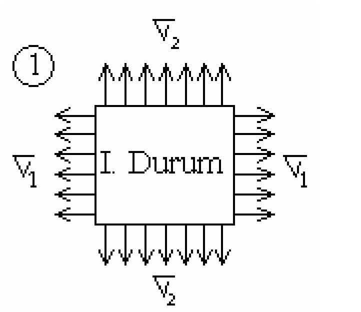
Bir Nokta Civarındaki Gerilme Durumu:

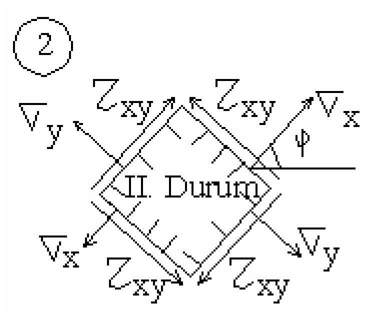
$$\sigma_x=\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}+\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\times Cos2\varphi$$

$$\sigma_y=\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}-\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\times Sin2\varphi$$

$$\tau_{xy}=-\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}\times Sin2\varphi$$







1. şekilde I. Durum veriliyor. II durum soruluyor.

2. şekilde II. Durum veriliyor. I durum soruluyor.

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad \text{ve} \quad tg2\varphi = \frac{2\tau_{xy}^2}{\sigma_x - \sigma_y}$$

I. duruma ***Asal gerilme durumu*** denir. σ_1 ve σ_2'yede ***asal gerilmeler*** denir.

φ = Asal doğrultusu

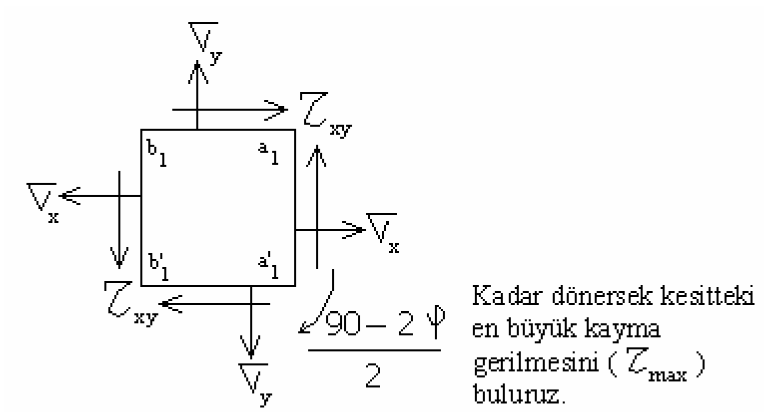
II. duruma bir nokta civarındaki ***genel gerilme durumu*** denir.

Genel Gerilme Halinde:

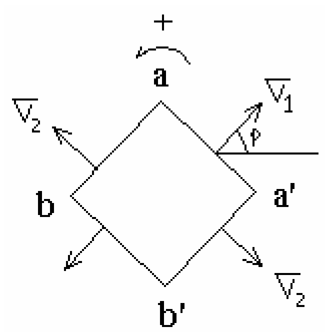
σ_x	τ_{xy}	Bu tabloya 2 eksenli gerilme tansörü
τ_{xy}	σ_x	

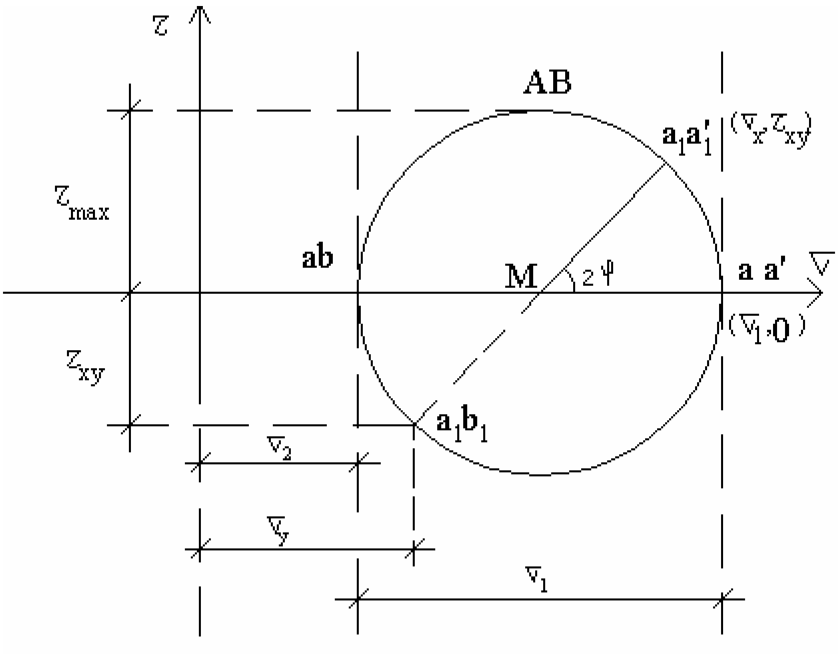
Genel Halinde:

Şekilde (φ) kadar saat ibresinin tersinde dönüyoruz. Mohr dairesinde saat ibresinde (2φ) kadar döner.



Şekilde 90° dönünce dairede 180° dönüyoruz. Şekilde (φ) kadar bir açı olunca Mohr Dairesinde (2φ) olur.





Bir kesit; kesitte φ kadar dönüyorsa Mohr dairesinde ters yönde 2 φ kadar döner.

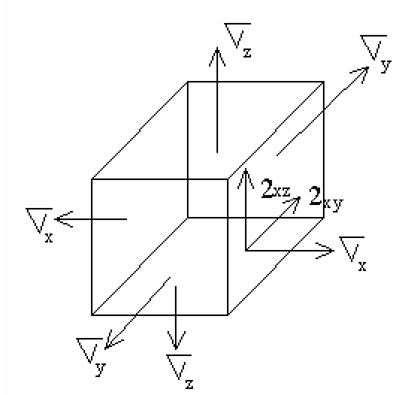
3 Eksenli Gerilme :

Gerilme tansörü:

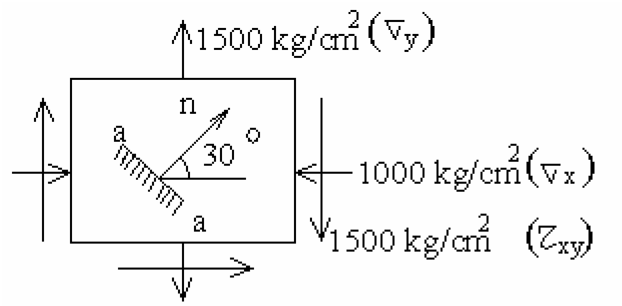
$\sigma_x \ \ \tau_{xy} \ \tau_{xz}$

$\tau_{xy} \ \sigma_y \ \ \tau_{yz}$

$\tau_{xz} \ \ \tau_{yz} \ \sigma_z$



Problem



Şekildeki gerilme hali veriliyor.

a) Bu kesite ait asal gerilmelerinin değerlerini ve doğrultularını bulunuz.

b) Kayma gerilmesinin en büyük değerini ve doğrultusunu bulunuz.

c) Kesitte verilmiş (aa) kesitine ait gerilmelerin değerini hesaplayınız.

d) Bütün değerleri Mohr dairesi çizerek üzerinde işaretleyiniz.

a) Asal gerilmeler

$$\left.\begin{aligned}\sigma_1 &= \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}+\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2}\\ \sigma_2 &= \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}-\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2}\end{aligned}\right\}$$ Kullanılacak formüller

$$tg\,2\varphi=\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x-\sigma_y}$$

σ_x = - 1000 kg / cm^2

τ_{xy} = Kayma gerilmesi = 1500kg/cm^2

σ_y = 500 kg / cm^2

$$\sigma_1=\frac{-100+500}{2}+\sqrt{\left(\frac{-1000-500}{2}\right)^2+(-1500)^2}$$

$$\sigma_1=-250+\sqrt{750^2+1500^2}=-250+1677.05\rightarrow$$

σ_1 = +1427.05 kg/cm^2

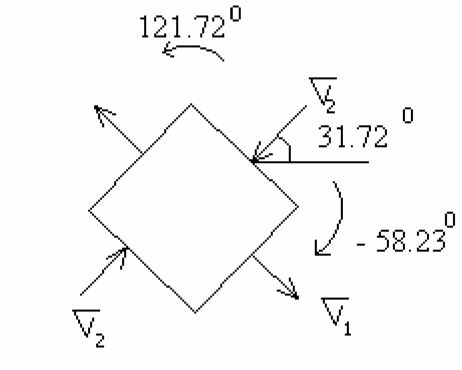
σ_1 = - 250 - 1677.05 = - 1927.05 kg/cm^2

doğrultusu

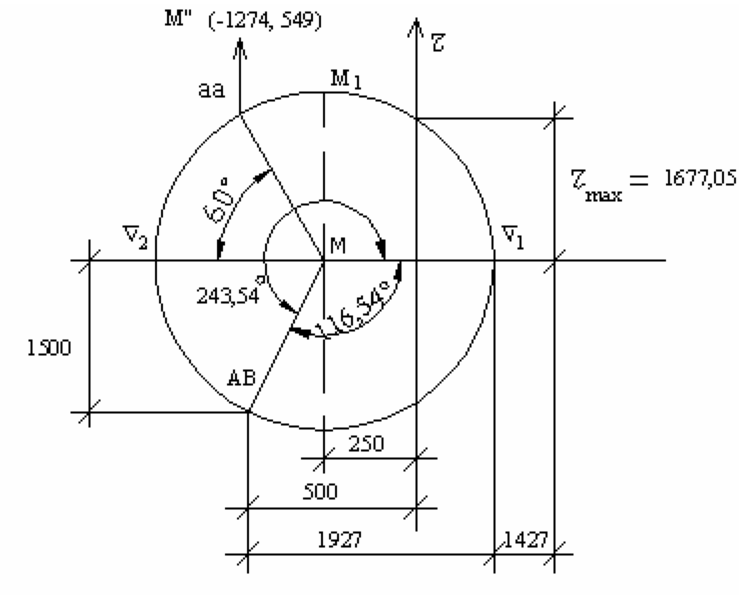
$$tg\,2\varphi=\frac{2(-1500)}{-1000-500}=\frac{-2}{-1}$$

2 φ = 63.43

φ = 31.72°



d)



$$\tau_{max} = \frac{1927+1427}{2} = 1677.05$$

$$\varphi_{max} = \frac{90-2\varphi}{2}$$

$2\,\xi = 243.46 - 90 = 153.46°$

ξ = pisi

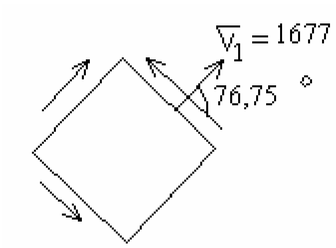
$\xi = 76.73°$

$\sigma = \sigma_x \, Cos^2\,\theta + \sigma_y \, Sin^2\,\theta + 2\,\tau_{xy}\, Sin\,\theta\, .Cos\,\theta$

$\tau = -\,(\sigma_x - \sigma_y)\, Sin\,\theta\, .\, Cos\,\theta \; + \tau_{xy}\,(Cos^2\,\theta - Sin^2\,\theta)$

b) $180 - 63.43 = 116.57°$

$360 - 116.57 = 243.43$



c)

$\sigma = \sigma_x \, Cos^2\,\theta + \sigma_y \, Sin^2\,\theta + 2\,\tau_{xy}\, Sin\,\theta\, .Cos\,\theta$

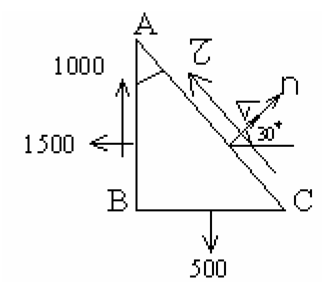
$\tau = -\,(\sigma_x - \sigma_y)\, Sin\,\theta\, .\, Cos\,\theta \; + \tau_{xy}\,(Cos^2\,\theta - Sin^2\,\theta)$

$\sigma = -\,1000\, Cos^2\,30 + 500\, Sin^2\,30 + 2\,(-1500)\, Sin\,30\, .Cos\,30$

$\sigma = -750 + 125 - 1649.52 = -\,1274\ kg/cm^2$

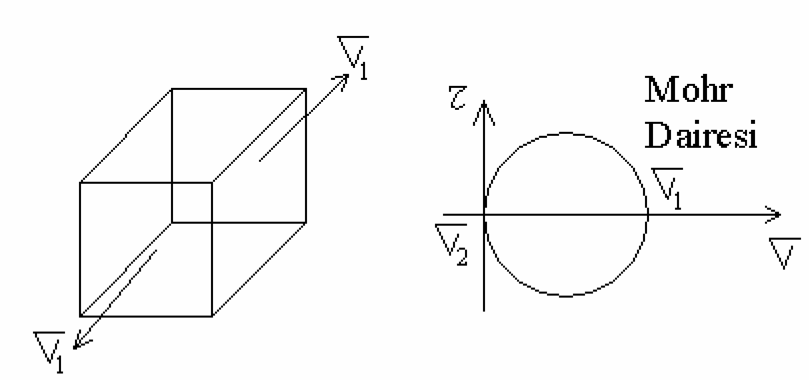
$\tau = -\,(1000 - 500)\, 0.5\, .\, 0.866 \; + 1500\,(0.75 - Sin^2\,30)$

$\tau = 649.5 \; + 750 = 1399.5$

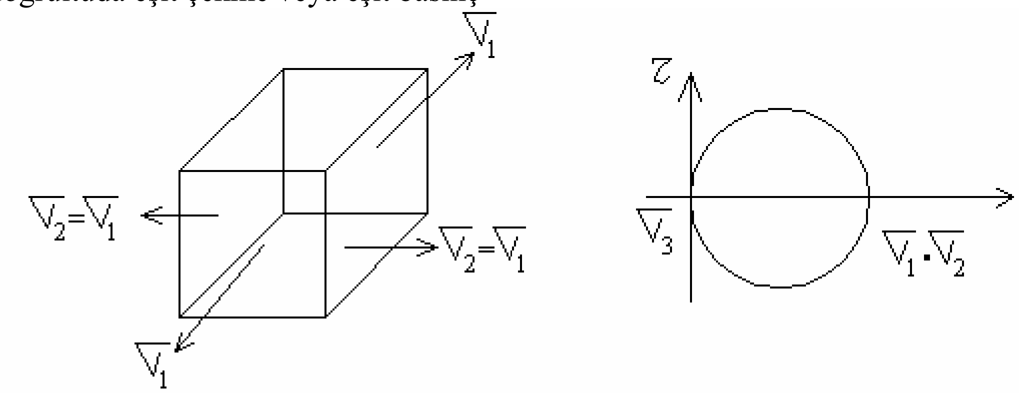


Bazı Özel Gerilme Halleri:

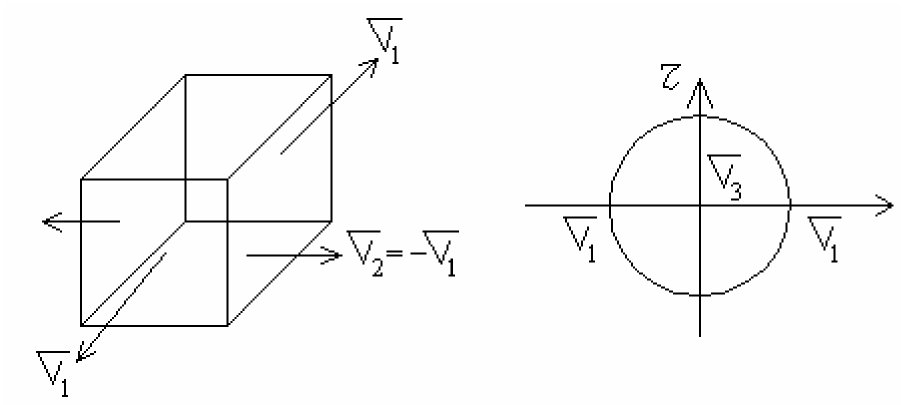
a) Basit çekme ve basit basınç



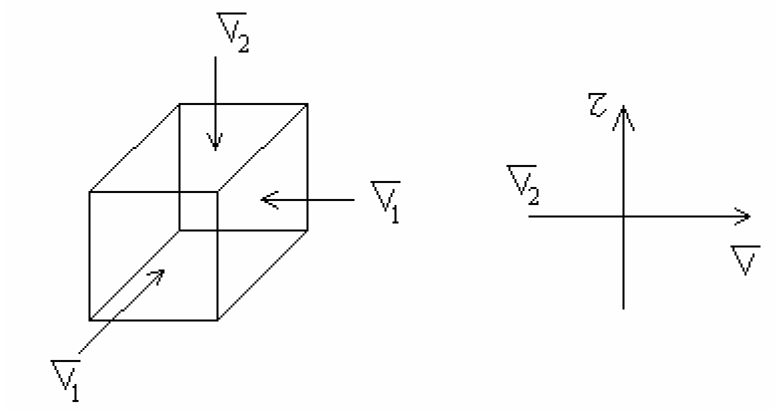
b) İki doğrultuda eşit çekme veya eşit basınç



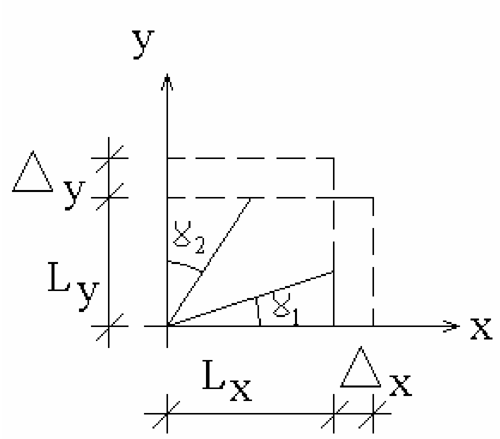
c) Basit kayma



d) Hidrostatik basınç



Şekil Değiştirme:



$\Sigma_x = \dfrac{\delta_x}{L_x}$ Birim uzama = Σ_x

$\Sigma_y = \dfrac{\delta_y}{L_x}$ Birim uzama = Σ_y

$\gamma_{xy} = \gamma_1 + \gamma_2$ = Düzlemdeki x, y doğrultularının açı değişimi

γ_{xy} = Birim kayma

$$\begin{bmatrix} \sum X & \frac{1}{2}\gamma_{xy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \sum X \end{bmatrix}$$ Düzlem halde şekil değiştirme tansörü

$\dfrac{\gamma_{xy}}{2}$ kullanmak formüllerde kolaylık sağlar.

$$\begin{bmatrix} \sum X & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \sum y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \sum z \end{bmatrix}$$ Üç boyuttaki şekil değiştirme tansörü

Kaymaların olmadığıdüzlemlere ***asal düzlem*** denir

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{bmatrix}$$ $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \rightarrow$ asal uzamalar. $\Delta v = \lambda u$

Hacim Değişimi:

$$\theta = \frac{\Delta v' - \Delta v}{\Delta v} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$$

Hook Yasası:

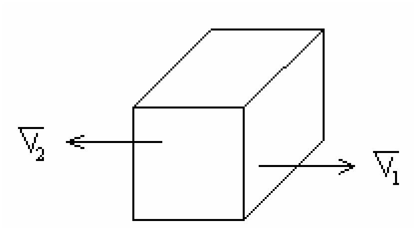
$\varepsilon = \frac{\sigma}{E},$ Birim Uzama = Gerilme/Şekil Değiştirme 1. Boyut için

ν = nü

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E}$$

$$\varepsilon_2 = -\nu \frac{\sigma_1}{E} \rightarrow \varepsilon_2 = -\nu.\varepsilon_1$$

$$\varepsilon_3 = -\nu \frac{\sigma_1}{E} \rightarrow \varepsilon_3 = -\nu.\varepsilon_1$$



Poission oranı

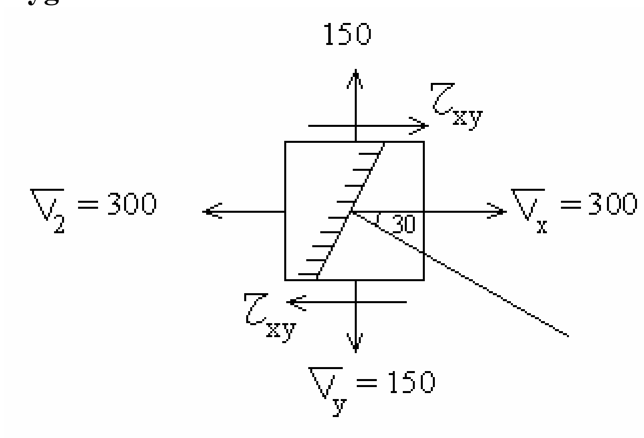
$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu\left(\sigma_y + \sigma_z\right)\right]$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu\left(\sigma_x + \sigma_z\right)\right]$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu\left(\sigma_y + \sigma_x\right)\right]$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}, \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}, \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G},$$

Uygulama 1:



İşaretli kesite ait normal ve kayma gerilmelerini bulunuz? Mohr dairesi üzerinde gerilmeleri gösteriniz?

Çözüm:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$tg2\varphi = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

$$\sigma = \sigma_x.Cos^2\varphi + \sigma_y.Sin^2\varphi + 2\tau_{xy}.Sin\varphi.Cos\varphi$$

$$\tau = -(\sigma_x - \sigma_y).Sin\alpha.Cos\alpha + \tau_{xy}\left(Cos^2\varphi - Sin^2\varphi\right)$$

$$\sigma_1 = \frac{300+150}{2} + \sqrt{\left(\frac{300-150}{2}\right)^2 + 0^2} = 300kg/cm^2$$

$$\sigma_2 = 225 - 75 = 150kg/cm^2$$

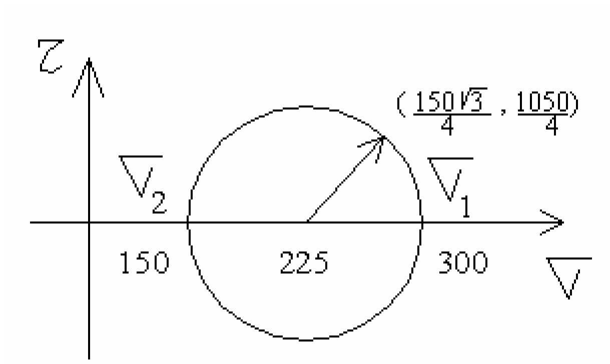
$$tg2.30 = \frac{2.0}{300-150} = 0 = \varphi$$

$$\sigma = 300.Cos^2 30 + 150.Sin^2 30 + 2.0.Sin30.Cos30$$

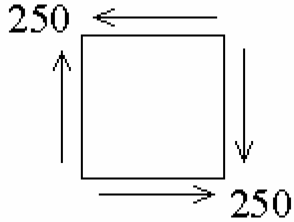
$$\sigma = 300.\frac{3}{4} + 150.\frac{1}{4} = 225 + 37{,}5 = \frac{1050}{4}$$

$$\tau = -(300-150).(-Sin30).Cos30 + 0.\left(Cos^2 30.Sin^2 30\right)$$

$$\tau = -150.\frac{-1}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{150\sqrt{3}}{4}$$



Uygulama 2:

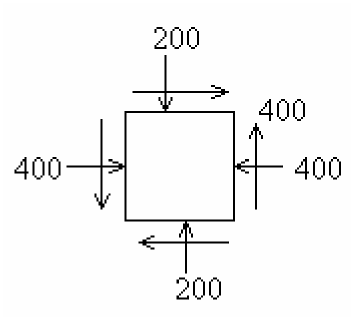


Asal gerilmeleri bulunuz ve Mohr dairesinde gösteriniz?

$$\sigma_{1,2} = \left(\frac{0+0}{2}\right) \mp \sqrt{\left(\frac{0-0}{2}\right)^2 + 250^2} = \mp 250$$

$$\tau = -(0-0).Sin0.Cos0 + 250.\left(Cos^2 0 - Sin^2 0\right) = 250$$

Uygulama 3:

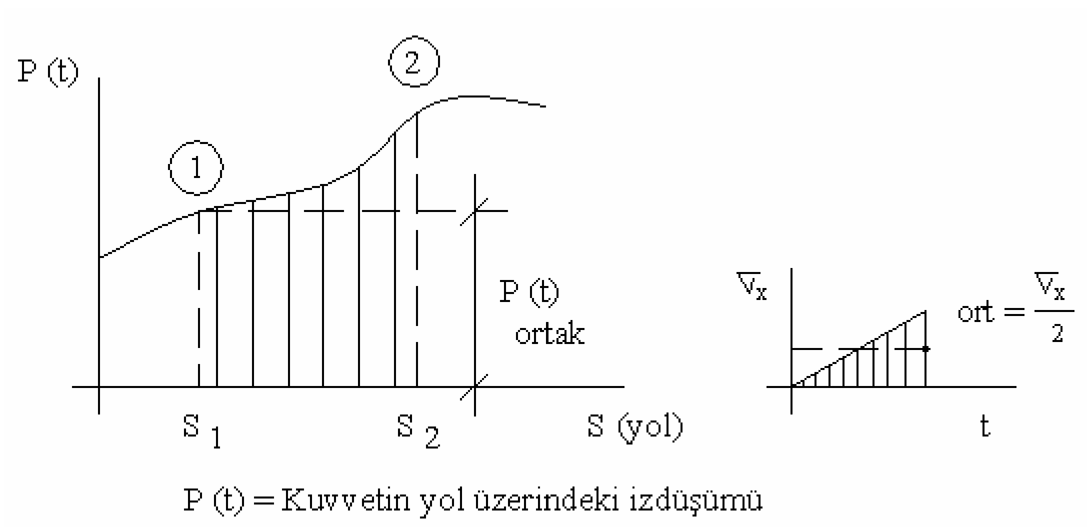


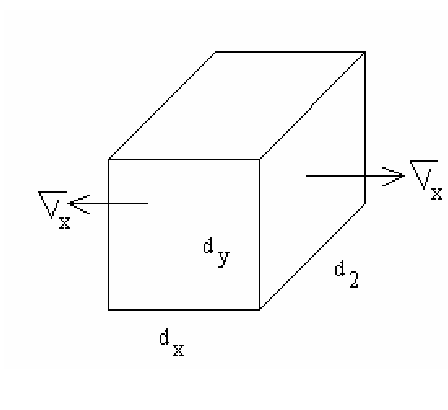
a) Asal gerilme ve doğrultusunu

b) En büyük kayma gerilmesini

c) Mohr dairesini çiziniz?

Şekil Değiştirme Enerjisi:





$\varepsilon_x = \sigma_x$'in etkimesiyle meydana gelen şekil değiştirme
du_i = Ortalama toplam kuvvet

$$du_i = \frac{1}{2}\sqrt{x}.dydz.\varepsilon_x dx$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{x}.\varepsilon_x.dv$$

σ_x'den meydana gelen ε_x birim uzamadır. Dx kadar yerine $dx\varepsilon_x$ olur.

$$\frac{du_i}{dv} = \frac{1}{2}\sigma_x.\varepsilon_x$$ Birim hacim başına şekil değiştirme enerjisi. (Enerji yoğunluğuda denir.)

σ_y'yi gözönüne alırsak

$$\frac{1}{2}\sigma_x.\varepsilon_x + \frac{1}{2}\sigma_y.\varepsilon_y$$

σ_z'yi gözönüne alırsak

$$\frac{1}{2}\sigma_x.\varepsilon_x + \frac{1}{2}\sigma_y.\varepsilon_y + \frac{1}{2}\sigma_z.\varepsilon_z$$

En genel halindeki şekil değiştirme enerjisi yoğunluğu:

$$U_i = \frac{1}{2}\sigma_x.\varepsilon_x + \frac{1}{2}\sigma_y.\varepsilon_y + \frac{1}{2}\sigma_z.\varepsilon_z + \frac{1}{2}\tau_{xy}.\gamma_{xy} + \frac{1}{2}\tau_{xz}.\gamma_{xz} + \frac{1}{2}\tau_{yz}.\gamma_{yz}$$

2 eksenli gerilme halinde:

$$U_i = \frac{1}{2}\left(\sigma_x.\varepsilon_x + \sigma_y.\varepsilon_y + \tau_{xy}.\gamma_{xy}\right)$$

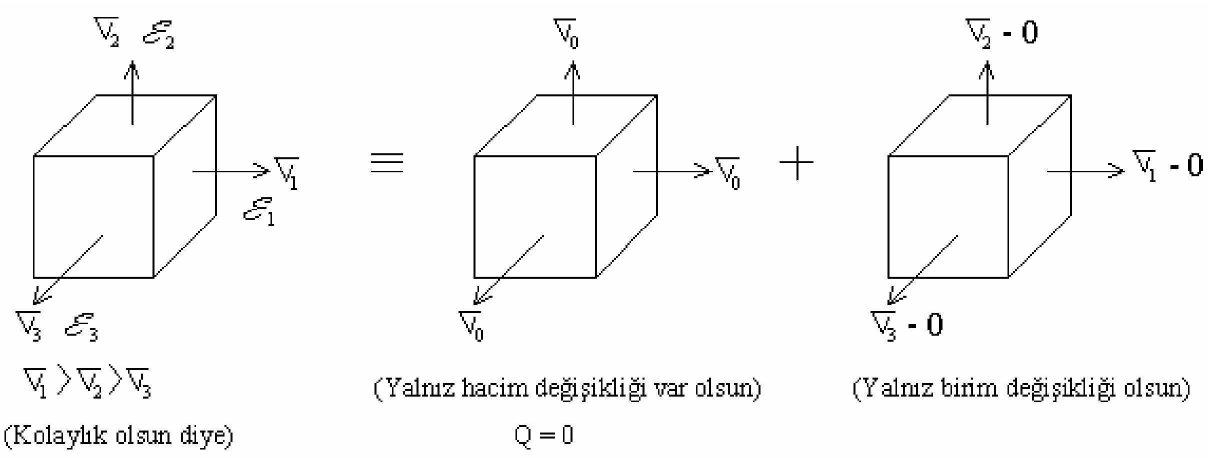
Hooke Yasaları:

Hooke yasalarından faydalanarak enerji yoğunluğunu yazmak istersek:

$$U_i = \frac{1}{2E}\left[\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - 2\nu\left(\sigma_x\sigma_y + \sigma_x\sigma_z + \sigma_y\sigma_z\right)\right] + \frac{1}{2G}\left(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2\right)$$

Asal gerilmeler cinsinden:

$$U_i = \frac{1}{2E}\left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu\left(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3\right)\right] + \frac{1}{2G}\left(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2\right)$$



$$\theta = \frac{\Delta v' - \Delta v}{\Delta v} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$$, θ = Biçim değiştirme oranı , ε = Birim uzama

$$\theta = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \frac{1}{E}\left(\sigma_1 - \sigma_0\right) + \frac{1}{E}\left(\sigma_2 - \sigma_0\right) + \frac{1}{E}\left(\sigma_3 - \sigma_0\right) = 0$$

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 - 3\sigma_0 = 0$$

$$\sigma_0 = \frac{1}{3}\left(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3\right)$$

U_v = yalnız hacim değişmesinden olan şekil değiştirme enerjisi

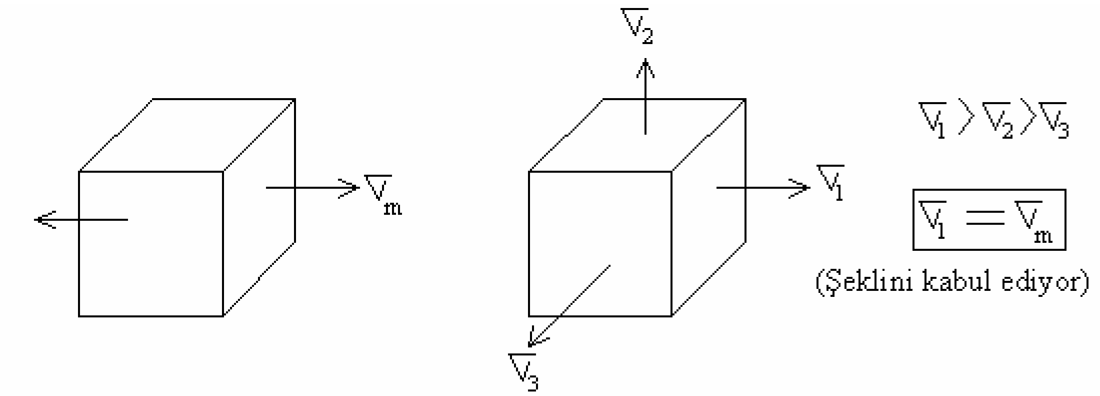
$$U\nu = \frac{1-2\nu}{6E}\left(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2\right)$$

Us = Yalnız biçim değiştirme, şekil değiştirme enerjisi

$$Us = \frac{1-2\nu}{6E}\left[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2\right]$$

Mukavemet Hipotezleri

1 – En büyük normal gerilme hipotezi:



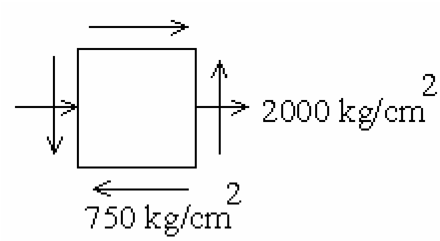
2 – En büyük kayma gerilmesi hipotezi:
Cisimdeki en büyük kayma gerilmesini deneyle elde edilen gerilme eşitliyor.
$\sigma_{(m)} = \sigma_1 - \sigma_3$
3- En büyük şekil değiştirme hipotezi:
σ_m/ε_1 deneyle elde edilen gerilme en büyük uzamayla mukayese ediliyor.
4- Biçim değiştirme hipotezi:

$$\frac{1+V}{GE}\sigma_m^2 = \frac{1+V}{GE}\left[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2\right]$$

Deneyde 1 eksende elde edilen biçim enerjisi karşısına çıkan problemdeki biçim değiştirme enerjisine eşittir.

$$\sigma_m^2 = \left[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2\right]$$

Örnek:



Bir noktadaki gerilme durumu şekilde gösterildiği gibi verilmiştir. Bu malzeme için tek eksenli gerilme halinde laboratuar deneylerinden elde edilen σ_m (mukayese gerilmesi) = 2400 kg/cm^2 dir. En büyük normal, en büyük kayma gerilmesi, biçim değiştirme enerjisi hipotezlerine göre malzemenin bu gerilme durumuna dayanıp dayanamayacağını araştırınız?

$\nu = 0{,}3$

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2}$$

= 2250 kg/cm^2 $\sigma_1 = 2250$

-250 kg/cm^2 $\sigma_2 = 0$

$\sigma_3 = -250$ olmalıdır.

$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ hipotezine göre

a) $\sigma_1 = \sigma_m$

2250<2400 malzeme taşır.

b) $\sigma_m = \sigma_1 - \sigma_2$

2400<2250-(-250)

2400<2500 malzeme taşımaz.